解析学の基礎

柳原 宏

序

目 次

序 **i**

第 1 章　集合と論理 **1**

1.1　集合 1

1.1.1　集合の演算 1

1.1.2　直積 11

1.2　論理 12

1.2.1　命題と真偽表 12

1.2.2　自由変数を含む命題と真理集合 16

1.2.3　全称記号 ∀ と存在記号 ∃ 17

1.3　写像と濃度 22

1.3.1　写像と函数 22

1.3.2　有限集合と無限集合 24

第 2 章　実数の公理系 **29**

2.1　四則演算の公理 29

2.2　順序の公理 33

2.3　連続性の公理 34

2.4　拡張された実数系と sup, inf 41

2.5　アルキメデスの原理とガウス記号 45

2.6　無理数の存在と実数の非可算性 46

第 3 章　数列 **53**

3.1　数列の極限の定義 53

3.2　極限の性質 61

3.3　単調数列 66

3.4　級数 71

3.5　集積値, 上極限, 下極限 74

第 4 章　函数の極限 **79**

4.1　多項式, 有理函数 79

4.2　函数の極限 80

4.3　極限定理 85

4.4　片側極限 (one-sided limit) 89

4.5 ランダウの記号 92

第 5 章 連続函数 95

5.1 連続函数の定義と基本的性質 95
5.2 有界閉区間上の連続函数 101
5.3 一様連続函数 104
5.4 単調函数と連続性 106
5.5 指数函数, 対数函数, 逆三角函数 108

第1章　集合と論理

1.1　集合

1.1.1　集合の演算

範囲の確定したもの (数学的な思考の対象) の集まりを，集合 (set) という. 例えば 1 から 10 までの自然数の集まり, $-1/2 \leq x \leq 3$ をみたす実数 x の全体などは集合である. 集合を構成する個々のものを, その集合の元または要素 (element) という. x が集合 A の元であることを x は A に属する (x belongs to A) といい

$$x \in A \quad \text{または} \quad A \ni x$$

で表わす. x が A に属さないときは

$$x \notin A \quad \text{または} \quad A \not\ni x$$

で表わす.

次に集合 A のすべての元が集合 B にも属するとき, つまり "$x \in A$ ならば $x \in B$" が成り立つとき A は B の部分集合 (subset) である, または A は B に含まれる (A is contained in B) といい,

$$A \subset B \;\; \text{または} \;\; B \supset A$$

と書く. さらに $A \subset B$ と $B \subset A$ が両方とも成り立つとき A と B は一致する, または等しいといい, $A = B$ で表わす. また A と B が等しくないときは, $A \neq B$ と表す.

集合 A が集合 B の部分集合であるが B と等しくはないとき, A は B の真部分集合 (proper subset) といい

$$A \underset{\neq}{\subset} B$$

で表わす.

記号 $\subset, \supset, \underset{\neq}{\subset}, \underset{\neq}{\supset}$, などで表される 2 つの集合の間の関係を, 包含関係という.

注意 1.1.1 本書の定義と異なり, 教科書によっては A が B の部分集合であるとき $A \subset B$ とは表さずに $A \subseteqq B$ と表し, A が B の真部分集合であるときに $A \subset B$ と表すことがある.

性質 1

(i) $A \subset A$

(ii) $A \subset B$ かつ $B \subset C$ ならば $A \subset C$

さて上にあげた事実が成り立つのは "明らか" と思う読者もいるであろうが, 部分集合の定義をきちんと理解し覚えているかどうかの確認をする為に, 証明を述べておこう.

証明. (i) 部分集合の定義を "$A \subset A$" という主張にあてはめると "$A \subset A$" とは "$x \in A$ ならば $x \in A$" が成り立つことを意味する. この " $\cdots$ " の部分は確かに成り立つから $A \subset A$ が成り立つ.

(ii) 部分集合の定義より $A \subset C$ を示すには $x \in A$ と仮定して, $x \in C$ が成り立つことを導けば良い.

まず $A \subset B$ とは "$y \in A$ ならば $y \in B$" が成り立つことを意味する. 従って y として x を採用すれば $x \in B$ が成り立つ. さらに $B \subset C$ より "$z \in B$ ならば $z \in C$" が成り立つ. 今度は z として x を採用すれば $x \in C$ が成り立つ. 以上を整理すると, 結局 $x \in A$ を仮定して $x \in C$ が成り立つこと導かれたことになり, これは部分集合の定義より $A \subset C$ が成り立つことを意味する. □

性質 1 は証明するまでもなく明らかであると考えた読者の中で上で述べたような証明が頭の中に思い浮かんだ人がいるだろうか? このような証明が思い浮かべられなかった読者や, 上の証明を読んで初めて, こうすれば良いのかとわかった読者に, 一言注意をしておこう. 数学では "当たり前" とか "明らか" という言葉は上のような数行程度の証明が瞬時に思い浮かべることができる時にのみ使う. 勿論, 学習が進んでいくに従って, 読者にとって "明らか" な内容のレベルは次第に高度になっていくであろうが, 高校レベルの数学の学習を終え, 大学レベルの数学の勉強を始めたばかりという今の段階では "厳密にそして一歩一歩着実に考える" 訓練をしなければならない. 暫くの間は " 明らか" とか "当たり前" という言葉を封印して, どんなに簡単と思えることでも, 上のような定義と論理に基づいた証明を考えて, ノートに書くという習慣を身につけてほしい. 数学の専門書は本書のような入門書の類を別にすれば, 読者がこのような愚直な訓練を十分に積んでいるということを暗黙の前提として書かれる. 数学の専門書を自力で読んでいけるようになる為には, 入門の段階での地道な訓練が必要である.

具体的な訓練法は, まず用語の定義をきちんと覚えることである. [1] そして定理などの主張の定義が分かっているかどうかを確認する. それから証明を

[1]例えば **性質 1** の証明を自分で考えようと思ったら, 2 つの集合 D, E について "$D \subset E''$ であることの定義を知っていないとできるはずがない. 筆者の教育経験では, 証明を自分で考えることができないと学生さんが訴えるとき, 証明すべき事柄の定義を把握していないことが殆どである.

精読することである．そして自分なりに証明が理解できたと思ったら, 本を閉じて, ノートに証明を再現する．本書のような入門書以外の数学書の場合, 証明は細部を省略して書かれることが多いので, 自分で細部を補っていけば, 殆どの場合 2, 3 倍の長さになる．勿論, 1 回で全てが再現できれば良いが, できなければもう一度本を読み, 証明が再現できるまで繰り返す．論理的な思考力を身につけるには, このような訓練を積む以外に方法はない．

本書を含めて大学以上の数学の本では, 高校までと比べて演習問題の数が少なく, 勉強がしにくいと感じる人は数多い．しかしながら上に書いたような訓練をすることがすなわち, 最高の演習に他ならない．証明を自分で書き下すという訓練をしないで, いたずらに演習問題を求めるのは本末転倒というものである．

尚, 本書では証明の終りや, 推論が終了したことを記号 □ で示すことにする．

元を全く持たない集合を空集合 (empty set) といい, $\emptyset$ で表わす．空集合 $\emptyset$ については, $\emptyset \subset A$ が任意の集合 A について成り立つと規約する．何故このように規約するのか, 理由を説明しておこう．尚, 下に述べる説明を理解するには "仮定", "結論" や "対偶" とかのいわゆる命題や論理について知っている必要がある．これらを高校で学習していない読者は, 次節に命題や論理の解説があるので, それを読んだ後で, もう一度下の説明を読むこと．

部分集合の定義によれば $\emptyset \subset A$ とは

$$x \in \emptyset \text{ ならば } x \in A \tag{1.1.1}$$

が成り立つことを意味する．ここで $x \in \emptyset$ という条件は決してみたされないので (1.1.1) は成り立つ．よって $\emptyset \subset A$ である．この議論に納得できなければ, (1.1.1) の対偶を取ってみよう．すると

$$x \notin A \text{ ならば } x \notin \emptyset \tag{1.1.2}$$

となるが, これの結論 "$x \notin \emptyset$" は仮定 "$x \notin A$" が成り立つかどうかにかかわらずつねに正しい．従って対偶が正しいのであるから, (1.1.1) も正しいとすべきであることが理解できよう．数学では "P ならば Q である" という命題は, P が成り立たないとき, 正しいとみなす．このようなとき, 命題は無内容的に成り立つという．

本書では, 自然数全体の集合, 整数全体の集合などを良く用いる．これらの集合は, 次にあげる記号で表されるのが一般的である．但し, 次式において "$\stackrel{\text{def}}{=}$" とは左辺を右辺として定義 (definition) するという意味である．

$$\mathbb{N} \stackrel{\text{def}}{=} \text{自然数 (natural number) 全体の集合}$$
$$\mathbb{Z} \stackrel{\text{def}}{=} \text{整数 (integer) 全体の集合}$$
$$\mathbb{Q} \stackrel{\text{def}}{=} \text{有理数 (rational number) 全体の集合}$$

$$\mathbb{R} \stackrel{\text{def}}{=} \text{実数 (real number) 全体の集合}$$
$$\mathbb{C} \stackrel{\text{def}}{=} \text{複素数 (complex number) 全体の集合.}$$

さて数学では 0 を自然数とみなすか, それとも自然数とみなさいかという 2 つの立場があり, どちらの立場を採用するかは, 教科書によって様々である. 本書では 0 は自然数では無いと言う立場を採用することにする. 従って自然数全体の集合 $\mathbb{N}$ は, $1, 2, 3, \ldots$ からなり, $0 \notin \mathbb{N}$ とする.

集合の書き表し方

集合を式で書き表すには幾つかの方法がある. まず集合は “条件 P をみたす元 x 全ての集合” というように定義されることが多い. このときは $\{x : P\}$ と書いてその集合を表わす. つまり元のみたすべき条件を “:” (コロン) の右側に書いて表わす. 例えば 0 以上 1 以下の全ての実数の集合は

$$\{x :\ x \text{ は実数で } 0 \leq x \leq 1\ \}$$

と表わされる. 勿論 x はいわばダミーの変数と言うべきものであり, x の代わりに他の y, t 等の如何なる文字を用いても意味は同じである. また前後の関係から省いても差し支えない条件は省略されることが多い. 実数を問題にしていることが文脈からわかっていれば, 上の集合を

$$\{x : 0 \leq x \leq 1\}$$

と表わしても良い. しかしながらこのような書き方をしたとき, 実数を扱っているのかそうでないのか, 混乱の恐れがあるときは

$$\{x \in \mathbb{R} : -\frac{1}{2} \leq x \leq 3\}$$

と書く. これは集合 S の元であり, かつ条件 P を満足するものの全体を

$$\{x \in S : P\}$$

と表わすという表記法である.

次にもう少し違った表記法の例を挙げよう. 有理数とは整数と自然数の商となっている数のことであるから

$$\mathbb{Q} = \{x = \frac{q}{p} :\ p \in \mathbb{N},\ q \in \mathbb{Z}\}$$

と表す. つまり自然数 p と整数 q により $x = \frac{q}{p}$ と表すことができる x の全体がなす集合を上式の右辺のように表すのである. ここで右辺の $\{\}$ の中の $\frac{q}{p}$ において $p = 3$, $q = 2$ と $p = 6$, $q = 4$ のときは同一の有理数 $2/3$ を表現していることに注意しよう. つまり集合を書き表す時, 表現の仕方に重複があっても良いとする.

集合が有限個の元からなるか, または空集合のとき有限集合 (finite set) といい, そうでないときは無限集合 (infinite set) という. 集合 A が有限集合で $x_1, x_2, \ldots, x_n$ から構成されているときは $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ のように元を列記して表わす. このとき, 書き並べる順番はどうでも良い. 例えば

$$\{x \in \mathbb{R} : x^2 = 2\} = \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\} = \{\sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$$

が成り立つ.

無限集合でも一部を書いて全体が推測できるときは $A = \{x_1, x_2, \ldots\}$ のような書き方も許される. 例えば $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$, $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ と表わせる. $\mathbb{Z}$ についてはもっと乱暴だが $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ と書くことが多い.

和集合と共通部分

集合 A と B について少なくともどちらか一方の元であるものの全体を A と B の和集合 (union) といい, $A \cup B$ で表わす. つまり A または B に属する元全体の集合 (勿論 A, B の両方に属する元も $A \cup B$ に属しているとする) である. つまり

$$A \cup B \stackrel{\text{def}}{=} \{x : x \in A \ \text{ または } \ x \in B\}$$

である.

A と B に共通な元全体の集合を A, B の共通部分, 交わり, 積集合 (intersection) などといい, $A \cap B$ で表わす. つまり

$$A \cap B \stackrel{\text{def}}{=} \{x : x \in A \ \text{ かつ } \ x \in B\}$$

である. 特に A, B に共通の元がないとき, つまり $A \cap B = \emptyset$ のとき A と B は互いに素 (disjoint) であるとか交わらない (nonintersecting) という.

性質 2　A, B を集合とする.

(i) $A \subset A \cup B$, $B \subset A \cup B$

(ii) $A \subset B$ ならば $A \cup B = B$. また $A \cup B = B$ ならば $A \subset B$

(iii) $A \cap B \subset A$, $A \cap B \subset B$

(iv) $A \subset B$ ならば $A \cap B = A$. また $A \cap B = A$ ならば $A \subset B$

証明. (i) $x \in A$ と仮定しよう. このとき命題 “$x \in A$ または $x \in B$” は主張の前半部分が成り立っているので, 命題全体についても成り立つ. 従って $x \in A \cup B$ が成り立つ. つまり $x \in A$ ならば $x \in A \cup B$ が成り立つことになる. これは部分集合の定義より $A \subset A \cup B$ であることを意味する. $B \subset A \cup B$ についても同様である.

(ii) まず $A \subset B$ と仮定する．$x \in A \cup B$ ならば $x \in A$ または $x \in B$ である．そこで次のように場合分けをして考えよう．

1). $x \in A$ のときは $A \subset B$ より $x \in B$ が成り立つ．2). $x \in B$ のときも, 当然 $x \in B$ が成り立つ．従って 1), 2) のどちらの場合でも $x \in B$ が成り立つ.

以上より $x \in A \cup B$ ならば $x \in B$ が成り立つ．これは $A \cup B \subset B$ を意味する．さらに (i) より $B \subset A \cup B$ が成り立つ．これで両方の包含関係が示されたので $A \cup B = B$ が成り立つ.

逆に $A \cup B = B$ とする．(i) より $A \subset A \cup B$ であるから $A \subset A \cup B = B$ となるので $A \subset B$ が成り立つ.

(iii) $x \in A \cap B$ ならば, "$x \in A$ かつ $x \in B$" が成り立つ．よって特に $x \in A$ が成り立つ．従って "$x \in A \cap B$ ならば $x \in A$" が成り立つので $A \cap B \subset A$ である．$B \subset A \cap B$ についても同様である.

(iv) $A \subset B$ とする．まず (iii) より $A \cap B \subset A$ が成り立つ．次に $x \in A$ とすると $A \subset B$ より $x \in B$ が成り立つ．よって $x \in A$ と $x \in B$ が同時に成り立つので $x \in A \cap B$ である．よって $A \subset A \cap B$ が成り立つ．従って $A = A \cap B$ が成り立つ.

逆に $A \cap B = A$ とする．このとき (iii) より $A \cap B \subset B$ であるから $A \subset B$ が成り立つ.　□

注意 1.1.2 上の証明では, "$\cdots$ についても同様である" と書いて, 2, 3 の包含関係の証明を省略した．このような所は, 良い演習問題の機会である．是非自分のノートに証明を書いて見てほしい．これは本書のみならず他の数学書を読む際にも通じる注意である．"同様" とすまして, 証明が省略された部分もゆるがせにせず, 自分で証明を補って読んで行くことが実力を身につける最良の手段である.

注意 1.1.3 **性質 1** の *(i)* の証明では "部分集合の定義を $A \subset A$ にあてはめると" と書いて, $A \subset B$ の定義が $x \in A$ ならば $x \in B$ が成り立つことであることを読者が自然に思い起こせるように書いた．しかながら **性質 2** の証明では, ここまで丁寧には書いていない．これは読者が $A \subset B$ の定義を当然知っていると想定したからである．このように数学の証明は読者が少なくとも定義についてはきちんと覚えている, とみなして書くことが普通である．また読者が, 前に述べたような証明を自分で再現する訓練を積んでいるということを想定するので, ページが進むにつれて, 証明の細部はますます省略して書かれるようになる.

性質 3 A, B, C を集合とする.

(i) $A \cup A = A$, $A \cap A = A$

(ii) (交換法則)
$A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$

(iii) (結合法則)
$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$, $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

(iv) (分配法則)
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$, $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

(v) $A \cup \emptyset = A$, $A \cap \emptyset = \emptyset$

証明. (i) "$x \in A$ または $x \in A$" ならば $x \in A$ が成り立つので $A \cup A \subset A$ である. また $x \in A$ ならば $x \in A$ または $x \in A$" も成り立つので, $A \subset A \cup A$ である. よって $A \cup A = A$ が成り立つ. $A \cap A = A$ についても同様である.

(ii) "$x \in A$ または $x \in B$" と "$x \in B$ または $x \in A$" が同じ内容を表わしていることから, 一方が成り立てばもう一方も成り立つので $A \cup B = B \cup A$ が成り立つ. $A \cap B = B \cap A$ についても同様である.

(iii) $x \in A \cup (B \cup C)$ とは $x \in A$ または $x \in B \cup C$ が成り立つことを意味し, これは $x \in A$ または "$x \in B$ または $x \in C$" が成り立つことを意味する. さらにこれは $x \in A$, $x \in B$, $x \in C$ の少なくともどれか 1 つが成り立つことを意味する. 従って集合 D を

$$D = \{x : x \in A,\ x \in B,\ x \in C \text{ の少なくともどれか 1 つが成り立つ}\}$$

とおけば $D = A \cup (B \cup C)$ である. 一方 $x \in (A \cup B) \cup C$ としても同じ結論に達するので, $D = (A \cup B) \cup C$ である. よって $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ が成り立つ. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ については

$$E = \{x : x \in A,\ x \in B,\ x \in C \text{ の全てが成り立つ}\}$$

とおけば, $A \cap (B \cap C) = E$ と $(A \cap B) \cap C = E$ を示すことができることから従う. 詳細は読者自ら補うこと.

(iv) $x \in A \cap (B \cup C)$ とすると $x \in A$ かつ "$x \in B$ または $x \in C$" が成り立つ. そこで次のように分類を行う.

1) $x \in B$ のときは, $x \in A$ と合わせて $x \in A \cap B \subset (A \cap B) \cup (A \cap C)$ が成り立つ. 2) $x \in C$ ののときも, $x \in A$ と合わせて $x \in A \cap C$ ゆえ $x \in A \cap C \subset (A \cap B) \cup (A \cap C)$ が成り立つ. 従って 1), 2) のどちらの場合でも $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$ が成り立つので $A \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup (A \cap C)$ である.

逆に $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$ とすると, $x \in A \cap B$ または $x \in A \cap C$ である. そこで次のように分類を行うと

a) $x \in A \cap B$ のときは "$x \in A$ かつ $x \in B$" であり, $B \subset B \cup C$ より, "$x \in A$ かつ $x \in B \cup C$" が成り立つ. よって $x \in A \cap (B \cup C)$ である. b) $x \in A \cap C$ のときは "$x \in A$ かつ $x \in C$" であり, $C \subset B \cup C$ より, "$x \in A$ かつ $x \in B \cup C$" が成り立つ. よって $x \in A \cap (B \cup C)$ である. 従って a), b) のどちらの場合でも $xA \cap (B \cup C)$ が成り立つので $(A \cap B) \cup (A \cap C) \subset A \cap (B \cup C)$ が成り立つ.

以上より両方の包含関係が示されたので $(A \cap B) \cup (A \cap C) = A \cap (B \cup C)$ が成り立つ. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ についても同様である.

(v) $x \in A \cup \emptyset$ ならば $x \in A$ または $x \in \emptyset$ が成り立つが, $x \in \emptyset$ は起こり得ないから, 結局 $x \in A$ が成り立つことになる. よって $A \cup \emptyset \subset A$ である. $A \subset A \cup \emptyset$ については**性質 2** の (ii) より従う. よって $A \cup \emptyset = A$ である. 次に $x \in A \cap \emptyset$ ならば, $x \in A$ かつ $x \in \emptyset$ が成り立つが, これは $x \in \emptyset$ が起こり得ないから, 成り立たない. よって $x \in A \cap \emptyset$ となる元 x は存在しない. 従って $A \cap \emptyset = \emptyset$ である. □

集合 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ の少なくともどれか 1 つに属する元の全体の集合を $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ で表わす. つまり

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \overset{\text{def}}{=} \{x : \text{少なくとも 1 つの } k \text{ について } \ x \in A_k\}$$

これはまた

$$\bigcup_{k=1}^{n} A_k$$

とも表わされる. 同様に集合 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ の全てに属する元の全体の集合を $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$ で表す. つまり

$$A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n \overset{\text{def}}{=} \{x : \text{全ての } k \text{ について } \ x \in A_k\}$$

である. これはまた

$$\bigcap_{k=1}^{n} A_k$$

とも表わされる.

集合の集まりのことを, 集合の集合とは呼ばず, 集合族と呼ぶ. 集合 Λ の各元 λ について集合 A_λ が与えられているとしよう. このとき

$$\{A_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$$

を Λ をパラメータとする集合族という. このような集合族に関する和集合を次のように定義する.

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \overset{\text{def}}{=} \{x : \text{少なくとも 1 つの } \lambda \text{ に対して } x \in A_\lambda\ \}.$$

また共通部分については

$$\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{x:\ \text{全ての}\ \lambda\ \text{に対して}\ x\in A_\lambda\ \}$$

と定義する.

集合族について理解を深める為に例題を 1 つ与えておこう. この問題は次節の" 論理" を勉強すれば意味がより明確になり証明も simple にできる. そこで次節を読み終わってからもう一度, この例題を考えてみること.

例題 1.1.4 各 $t\in\mathbb{R}$ について 2 次元平面における中心の座標が $(t,0)$ で半径 1 の円 (境界も含む) を D_t とおく. つまり $D_t=\{(x,y):(x-t)^2+y^2\le 1\}$ とおく. また $S=\{(x,y):-1\le y\le 1\}$ とおく. このとき

$$\bigcup_{t\in\mathbb{R}} D_t = S, \quad \bigcap_{t\in\mathbb{R}} D_t = \emptyset$$

が成り立つことを示せ.

注意 1.1.5 本書では "⋯" を示せとは, "⋯" を証明せよという意味である.

例題の解答. 前半について. $(x,y)\in\cup_{t\in\mathbb{R}}D_t$ とは, 少なくとも 1 つの $t\in\mathbb{R}$ について $(x,y)\in D_t$ が成り立つことを意味する. 従ってこのような t について $(x-t)^2+y^2\le 1$ が成り立つ. よって $y^2\le(x-t)^2+y^2\le 1$ が成り立つので, $y^2\le 1$ つまり, $-1\le y\le 1$ が成り立つ. よって $(x,y)\in S$ である. 従って $\cup_{t\in\mathbb{R}}D_t\subset S$ が成り立つ.

逆に, $(x,y)\in S$ ならば $t=x$ とおくと $t\in\mathbb{R}$ であり, $-1\le y\le 1$ より $(x-t)^2+y^2=y^2\le 1$ が成り立つ. よって $(x,y)\in D_x\subset\cup_{t\in\mathbb{R}}D_t$ が成り立つ. 従って $S=\cup_{t\in\mathbb{R}}D_t$ であり, 前に示した逆の包含関係と合わせて $\cup_{t\in\mathbb{R}}D_t=S$ が成り立つ.

後半を示すには, 背理法により $(x,y)\in\cap_{t\in\mathbb{R}}D_t$ と仮定する, つまり $\cap_{t\in\mathbb{R}}D_t$ に元が存在すると仮定すると矛盾が導かれることを言えば良い. 実際これが示されれば, $\cap_{t\in\mathbb{R}}D_t$ には元が存在しないことになり, 従って空集合であることになる.

$(x,y)\in\cap_{t\in\mathbb{R}}D_t$ とすると, 全ての $t\in\mathbb{R}$ について $(x,y)\in D_t$ が成り立つ. つまり全ての $t\in\mathbb{R}$ について $(x-t)^2+y^2\le 1$ が成り立つ. そこで特に $t=x+2\in\mathbb{R}$ とおけば $1\ge(x-t)^2+y^2=4+y^2\ge 4$ となり矛盾を生じる. □

差集合, 補集合

集合 A, B について A に属すが B に属さない元全体からなる集合を A と B の差集合 (difference set) といい, $A\backslash B$ で表わす. すなわち

$$A\backslash B \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{x: x\in A\ \text{かつ}\ x\notin B\}$$

である.

注意 1.1.6 教科書によっては $A\backslash B$ を $A-B$ と表すことがあるので注意せよ. 本書では $A-B$ を別の意味に使う *(後述)*.

性質 4
A, B, C を集合とする.

(i) $(A\cap B)\cap(B\backslash A)=\emptyset$, $(A\cap B)\cup(B\backslash A)=B$.

(ii) (De Morgan の法則)]
$A\backslash(B\cup C)=(A\backslash B)\cap(A\backslash C)$, $A\backslash(B\cap C)=(A\backslash B)\cup(A\backslash C)$

証明.　(i) $x\in(A\cap B)\cup(B\backslash A)$ と仮定する. このとき $x\in A\cap B$ かつ $x\in B\backslash A$ が成り立つ. まず $x\in B\backslash A$ より $x\notin A$ である. また $x\in A\cap B$ より $x\in A$ が成り立つ. 従って $x\notin A$ と $x\in A$ が同時に成り立つことになり矛盾である. 従って $(A\cap B)\cup(B\backslash A)$ に属する元は存在しない, つまり $(A\cap B)\cup(B\backslash A)=\emptyset$ である.

次に $x\in B$ とする. $x\in A$ と $x\notin A$ の 2 つの場合に分類して考えると, 前者の場合は $x\in A$ かつ $x\in B$ より $x\in A\cap B\subset(A\cap B)\cup(B\backslash A)$ が成り立つ. また後者の場合は $x\in B$ かつ $x\notin A$ より $x\in B\backslash A\subset(A\cap B)\cup(B\backslash A)$ が成り立つ. よってどちらにしても $x\in(A\cap B)\cup(B\backslash A)$ が成り立つ. これは $B\subset(A\cap B)\cup(B\backslash A)$ を示す.

逆に $x\in(A\cap B)\cup(B\backslash A)$ とすると $x\in(A\cap B)$ または $x\in B\backslash A$ が成り立つ. $x\in(A\cap B)$ のときは $x\in A$ かつ $x\in B$ より $x\in B$ が成り立つ. また $x\in B\backslash A$ のときも $x\in B$ かつ $x\notin A$ よりやはり $x\in B$ が成り立つ. 従ってどちらの場合でも $x\in B$ が成り立つ. よって $(A\cap B)\cup(B\backslash A)\subset B$ が成り立つ. 以上より $B=(A\cap B)\cup(B\backslash A)$ が成り立つ.

(ii) $x\in A\backslash(B\cup C)$ とすると, $x\in A$ かつ $x\notin B\cup C$ であり, $x\in A$ かつ "$x\notin B$ かつ $x\notin C$" が成り立つ. よって "$x\in A$ かつ $x\notin B$" かつ "$x\in A$ かつ $x\notin C$" が成り立つ. 従って $x\in(A\backslash B)\cap(A\backslash C)$ が成り立ち, これより $A\backslash(B\cup C)\subset(A\backslash B)\cap(A\backslash C)$ がわかる. 逆に $x\in(A\backslash B)\cap(A\backslash C)$ とすると "$x\in A$ かつ $x\notin B$" かつ "$x\in A$ かつ $x\notin C$" が成り立つ. よって $x\in A$ かつ "$x\notin B$ かつ $x\notin C$" が成り立つので $x\in A\backslash(B\cup C)$ が成り立つ. これは $(A\backslash B)\cap(A\backslash C)\subset A\backslash(B\cup C)$ を示す. よって $A\backslash(B\cup C)=(A\backslash B)\cap(A\backslash C)$ が成り立つ.

$A\backslash(B\cap C)=(A\backslash B)\cup(A\backslash C)$ についてもほぼ同様であるから読者の演習問題とする.　□

数学の問題では, ある 1 つの集合 U を設定し U の中の部分集合だけを考えることが多い. このとき U を全体集合 (universal set) と言う.

U を全体集合とする, 集合 A を U の部分集合とする．このとき A に属さない U の元の全体の集合を A の (U に関する) 補集合 (complement) といい, A^c で表わす．つまり

$$A^c \stackrel{\text{def}}{=} U \setminus A = \{x \in U : x \notin A\}$$

である．このとき $x \in A^c$ とは $x \notin A$ を意味し, $x \notin A^c$ とは x が A の補集合に属さないことの否定であるから, $x \in A$ を意味することに注意しておこう．

性質 5
U を全体集合とし A, B をその部分集合とする．

(i) $(A^c)^c = A$, $A \cap A^c = \emptyset$, $A \cup A^c = U$

(ii) (De Morgan の法則)
$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$, $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

(iii) $A \subset B$ ならば $B^c \subset A^c$, また $B^c \subset A^c$ ならば $A \subset B$

証明．　(i) $x \in (A^c)^c$ ならば $x \notin A^c$．これは $x \in A$ を意味する．よって $(A^c)^c \subset A$ である．また $x \in A$ とすると, $x \notin A^c$ であり, これは $x \in (A^c)^c$ を意味する．よって $x \in (A^c)^c$ であり, $A \subset (A^c)^c$ となる．従って $(A^c)^c = A$ である．

後半の $A \cap A^c = \emptyset$ と $A \cup A^c = U$ については**性質 4** の (i) において $B = U$ とおけば $B \setminus A$ が $U \setminus A = A^c$ を表すことから従う．

(ii) については **性質 4** の (ii) において A を U, B を A, C を B に置き換えれば直ちに得られる．

(iii) $A \subset B$ とは "$x \in A$ ならば $x \in B$" を意味するが, これの対偶を取れば, "$x \notin B$ ならば $x \notin A$" となる．これは "$x \in B^c$ ならば $x \in A^c$" つまり $B^c \subset A^c$ を意味する．$B^c \subset A^c$ ならば $A \subset B$ については今の論法を逆にたどれば良い．　□

1.1.2　直積

空でない集合 A と B について A の元 x と B の元 y についてこの順序で組にした (x, y) を順序対と呼ぶ．　順序対は $x = x'$ かつ $y = y'$ のときに限り $(x, y) = (x', y')$ と定める．集合の場合には $\{x, y\} = \{y, x\}$ であったが, 順序対の場合には $x = y$ のとき以外は $(x, y) \neq (y, x)$ であることに注意しよう．このような A と B のそれぞれの元からなる順序対の全てが作る集合を A と B の直積 (direct product または Cartesian product) といい $A \times B$ で表わす．つまり

$$A \times B \stackrel{\text{def}}{=} \{(x, y) : x \in A,\ y \in B\} \tag{1.1.3}$$

である．但し (1.1.3) において $x \in A,\ y \in B$ とは $x \in A$ かつ $y \in B$ のことである．このように "かつ" を省略して書くことが良くあるので注意すること．

特に空集合との直積は

$$A \times \emptyset = \emptyset,\ \emptyset \times B = \emptyset,\ \emptyset \times \emptyset = \emptyset \tag{1.1.4}$$

と定める．一般に空でない n 個の集合 $A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_n$ の直積は

$$\begin{aligned} A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n &= \Pi_{k=1}^n A_k \\ &\stackrel{\mathrm{def}}{=} \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_1 \in A_1, x_2 \in A_2, \ldots x_n \in A_n\} \end{aligned}$$

で定義される．但し上式において等号 "=" は $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ を $\Pi_{k=1}^n A_k$ のように表すこともあるという意味であり，"$\stackrel{\mathrm{def}}{=}$" の右辺が "$A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_n$ の直積" の本当の定義である．本書ではこれからもこのような書き方をすることが多い．また上式の最右辺において "かつ" が省略されていることに注意しておこう．

特に $A_1 = A_2 = \ldots A_n = A$ のときは $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ は A^n と書く．例えば $\mathbb{R}^2$ や $\mathbb{R}^3$ は 2 次元平面と 3 次元空間であり，既に知っている読者もいることであろう．

問題 1.1.7 $A_1, B_1 \subset U_1,\ A_2, B_2 \subset U_2$ とする．このとき

$$(A_1 \times A_2) \cap (B_1 \times B_2) = (A_1 \cap B_1) \times (A_2 \cap B_2)$$

が成り立つことを示せ．

注意 1.1.8 上の問題において "$A_1, B_1 \subset U_1$" とは "$A_1 \subset U_1$ かつ $B_1 \subset U_1$" が成り立つことを意味する．数学の本ではこのような省略した書き方が使われることが多い．

1.2 論理

1.2.1 命題と真偽表

真か偽かを判定できる主張を命題 (proposition, statement) という． 命題が真であれば T(true)，偽であれば F(false) で表わすことにする．例えば "3 は素数である" という主張は命題であり，真 (T) である．また " 4 は奇数である" という主張も命題であり，これは偽 (F) である．

いくつかの命題を結合したり，否定を行うなどの操作をして，新しい命題を作ることがある．このようにして作られた命題を合成命題といい，合成命題を構成する個々の命題を成分命題という．

論理和

2 つの命題 p と q について "p または q" という命題を $p \vee q$ で表わす. $p \vee q$ は p, q の少なくとも一方が真のときに真となり, 両方とも偽のときに偽となる命題であり, p, q の論理和と呼ぶ. p, q が真, 偽のときに $p \vee q$ が真, 偽のどちらになるかは, 次のようないわゆる真偽表にまとめると便利である.

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

論理積

2 つの命題 p と q について p かつ q という命題を $p \wedge q$ で表わす. 命題 $p \wedge q$ は p, q の両方が真のときに真となり, 少なくとも一方が偽のときに偽となる命題であり, p, q の論理積と呼ぶ. $p \wedge q$ の真偽表は次のようになる.

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

否定 (negation)

命題 p について "p でない" という命題を p の否定命題といい, $\overline{p}$ で表わす.

p	$\overline{p}$
T	F
F	T

2 つの命題 p, q について p が真のとき q も真で, p が偽のとき q も偽となるとき, p, q は同値であるといい, $p \equiv q$ と表わす. つまり真偽表の縦の欄が一致するときに 2 つの命題は同値という.

命題間の演算規則

(i) (交換法則) $p \vee q \equiv q \vee p$, $p \wedge q \equiv q \wedge p$

(ii) (結合法則) $p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$, $p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$

(iii) (吸収法則) $p \vee (p \wedge q) \equiv p$, $p \wedge (p \vee q) \equiv p$

(iv) (分配法則)　$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$,
$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

証明. (i) については $p \vee q$ と $q \vee p$ の真偽表を作れば

p	q	$p \vee q$	$q \vee p$
T	T	T	T
T	F	T	T
F	T	T	T
F	F	F	F

となり, 2 つの命題 $p \vee q$ と $q \vee p$ の真偽は一致する. よって $p \vee q \equiv q \vee p$ である. $p \wedge q \equiv q \wedge p$ についても同様である.

(iv) の $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ について真偽表を作って証明しよう. 残りについては読者の演習問題としよう.

p	q	r	$p \vee q$	$p \vee r$	$q \wedge r$	$p \vee (q \wedge r)$	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	T	F	T	T
T	F	T	T	T	F	T	T
T	F	F	T	T	F	T	T
F	T	T	T	T	T	T	T
F	T	F	T	F	F	F	F
F	F	T	F	T	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F	F

□

つねに真である命題を 1, つねに偽である命題を 0 で表すことにすれば,

1. (排中律, 矛盾律) $p \vee \overline{p} \equiv 1$, $p \wedge \overline{p} \equiv 0$
2. (2 重否定の法則) $\overline{\overline{p}} \equiv p$
3. (de Morgan の法則) $\overline{p \vee q} \equiv \overline{p} \wedge \overline{q}$, $\overline{p \wedge q} \equiv \overline{p} \vee \overline{q}$.

が成り立つ. これらも全て真偽表を用いて証明することができるので読者の演習問題としよう.

命題 p ならば q

命題 p, q について命題 p ならば $q(p \Rightarrow q$ と表す) を真偽表を用いて

p	q	$p \Rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

と定義する．つまり p, q がともに真であるか, または p が偽のときに真で, それ以外のときに偽となる命題である．真偽表を作れば $p \Rightarrow q$ は命題 “$\overline{p} \vee q$ と同値であることがわかる．さらに de Morgan の法則より $\overline{p} \vee q \equiv \overline{\overline{\overline{p} \vee q}} \equiv \overline{p \wedge \overline{q}}$ となるので $\overline{p \wedge \overline{q}}$ とも同値である．

合成命題 $p \Rightarrow q$ において, p を仮定, q を結論と呼ぶことがある．また $p \Rightarrow q$ が真のとき, p を q の十分条件 (sufficient condition), q を p の必要条件 (necessary condition) と呼ぶ.

命題 $p \Rightarrow q$ について, 命題 $q \Rightarrow p$ と $\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$ をそれぞれ, 逆 (converse), 対偶 (contrapositive) と呼ぶ.　命題 $p \Rightarrow q$ が真であっても逆 $q \Rightarrow p$ は真とは限らない．これに比して対偶 $\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$ は $p \Rightarrow q$ と同値な命題である．実際, 同値であることは次のような変形を行うか, または真偽表を作ることによってわかる.

$$\overline{q} \Rightarrow \overline{p} \equiv \overline{\overline{q}} \vee \overline{p} \equiv q \vee \overline{p} \equiv \overline{p} \vee q \equiv p \Rightarrow q.$$

次に命題 “$p \Rightarrow q$ かつ $p \Rightarrow q$” のことを $p \Leftrightarrow q$ と書くことにしよう.. これの真偽表を作れば

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$p \Leftrightarrow q$
T	T	T	T	T
T	F	F	T	F
F	T	T	F	F
F	F	T	T	T

となる．従って命題 $p \Leftrightarrow q$ が真ならば, p, q はともに真か, ともに偽かであり, 一方が真でもう一方が偽とはならない．つまり p, q の真偽は一致し, p と q が同値であることを意味する．そこでこれからは p と q が同値であるとき, $p \equiv q$ と表さずに $p \Leftrightarrow q$ と表すことにする.

命題 $p \Leftrightarrow q$ が真のとき p, q をお互いの必要十分条件と呼ぶ.

1.2.2　自由変数を含む命題と真理集合

一つの集合 U が与えられているとして, 元 $x \in U$ の 1 つ 1 つについて命題 $p(x)$ が定まっているとする．このようなとき $p(x)$ は自由変数を含む命題または条件と呼ばれ, U をこの自由変数を含む命題の全体集合という．例えば U として $\mathbb{N}$ を取り, $p(n)$ を “n は偶数である” とすれば, これは自由変数を含む命題である．ここで自由変数を含む命題は, 今までの意味の命題ではないことに注意しておこう．何故ならば, 命題とは真偽が判定できるものであったが, 自由変数を含む命題は, 変数 x に特定の U の元を代入しなければ真偽が判定できないからである．

さて全体集合を U とする自由変数を含む命題 $p(x)$ が与えられたとする．このとき

$$P = \{x \in U : p(x)\}$$

を条件 $p(x)$ の真理集合という．例えば上で触れた, 全体集合を $\mathbb{N}$ とし “n は偶数である” という条件についての真理集合は偶数の集合 $\{2, 4, 6, 8, \ldots\}$ である．

2 つの自由変数を含む命題 $p(x)$ と $q(x)$ が同じ全体集合 U をもち, 任意の $a \in U$ について $p(a) \Leftrightarrow q(a)$ であるとき 2 つの条件 $p(x)$ と $q(x)$ は同値であるという．これは

$$\{x \in U : p(x)\} = \{x \in U : q(x)\}$$

つまり $p(x)$, $q(x)$ の真理集合が一致するのと同じことである．

問題 1.2.1 条件 $x^4 - 1 = 0$ について全体集合がそれぞれ $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ のときの真理集合を求めよ．

真理集合と論理演算

同じ全体集合をもつ自由変数を含む命題 $p(x)$, $q(x)$ について, 論理和や論理積, 否定を取ることにより

$$p(x) \wedge q(x),\ p(x) \vee q(x),\ \overline{p(x)},\ p(x) \Rightarrow q(x)$$

等の自由変数を含む命題を考えることができる．ここで $p(x)$, $q(x)$ の真理集合を, それぞれ P, Q とすると

(i) $p(x) \vee q(x)$ の真理集合は $P \cup Q$

(ii) $p(x) \wedge q(x)$ の真理集合は $P \cap Q$

(iii) $\overline{p(x)}$ の真理集合は $P^c (= U \backslash P)$

(iv) $p(x) \Rightarrow q(x)$ の真理集合は $P^c \cup Q$

が成り立つ. これらの関係式から, 命題に間する交換, 結合, 分配法則と集合に関する交換, 結合, 分配法則について互いに一方から他方を導くことができる.

1.2.3 全称記号 ∀ と存在記号 ∃

自由変数を含む命題 $p(x)$ は, x に全体集合 U の特定の元を代入してはじめて命題となるが,

"全ての $x \in U$ について $p(x)$ である"

はこれだけで真偽の判定ができるので 1 つの命題である. この命題は

$$\forall x \in U : p(x)$$

と書き表される. ここで ∀ は全称記号 (universal quantifier) と呼ばれ, all の頭文字 A を逆さにして作られたものである. 命題 "$\forall x \in U : p(x)$" は真理集合が全体集合と一致する, つまり命題 $\{x \in U : p(x)\} = U$ と同値である. 数学書ではこのような全称記号を含んだ命題は

任意の $x \in U$ について $p(x)$ が成り立つ

どのような $x \in U$ についても $p(x)$ が成り立つ

$p(x)$ は全ての $x \in U$ についても成り立つ

$p(x)$ holds for all(any) $x \in U$ についても成り立つ

などのように, 様々に表現され時には混乱を引き起こすが, 全て同じ内容を表している.

全体集合 U 上の自由変数を含む命題 $p(x)$ について

"少なくとも 1 つの $x \in U$ について $p(x)$ である"

もこれだけで 1 つの命題である. この命題を

$$\exists x \in U : p(x)$$

と書き表す. ここで ∃ は存在記号 (existential quantifier) と呼ばれ, exist の頭文字 E を逆さにして作られたものである. この命題は $\{x \in U : p(x)\} \neq \emptyset$ と同値である. このような ∃ を含む命題もやはり数学書では

適当な $x \in U$ について $p(x)$ が成り立つ

$p(x)$ が成り立つ $x \in U$ が少なくとも 1 つ存在する

$p(x)$ holds for some $x \in U$

there exists $x \in U$ such that $p(x)$ holds

と様々な表現をされるが全部同じ内容を表わしている.

例題 1.2.2 全体集合 U を持つ 2 つの条件 $p(x)$, $q(x)$ についてそれぞれの真理集合を $P = \{x \in U : p(x)\}$, $Q = \{x \in U : q(x)\}$ とおく．このとき命題 $\forall x \in U : p(x) \Rightarrow q(x)$ が成り立つことと, $P \subset Q$ が成り立つことは同値であることを示せ．

解答．　命題 $\forall x \in U : p(x) \Rightarrow q(x)$ が真であるとは, 条件 $p(x) \Rightarrow q(x)$ の真理集合が全体集合 U と一致することである．条件 $p(x) \Rightarrow q(x)$ の真理集合は, $P^c \cup Q$ であるから, 従って命題 $\forall x \in U : p(x) \Rightarrow q(x)$ が真であることは $P^c \cup Q = U$ と同値である．

次に $P^c \cup Q = U$ と $P \subset Q$ が同値であることを示そう．まず $P^c \cup Q = U$ と仮定する．このとき $x \in P$ について $x \in U = P^c \cup Q$ について 1) $x \in P^c$ または 2) $x \in Q$ の少なくとも一方が成り立つが, $x \in P$ より, 1) の場合は起こり得ないので, 2) が成り立つ．従って $x \in P$ について $x \in Q$ が成り立つので, $P \subset Q$ である．

逆に $P \subset Q$ ならば, **性質 5** の (iii) より $Q^c \subset P^c$ が成り立つ．よって $U = Q^c \cup Q \subset P^c \cup Q \subset U$ より $P^c \cup Q = U$ が成り立つ．　□

さて先に, “全て” つまり $\forall$ と “ある” つまり $\exists$ を含んだ命題は, 普通の文章では様々に表現されると述べた．これは確かに混乱を招きがちであるがさらに厄介なのは, “全て” や “ある” といった言葉自体が省略される場合である．このように文脈から適当に $\forall$ や $\exists$ を補って読まなければならない場合の例をあげて置こう．

例題 1.2.3 次の文章を $\forall$ や $\exists$ を含む命題として論理式で表せ．

(1) 自然数は整数である．

(2) $0 < x < \pi$ ならば $\sin x > 0$.

(3) 方程式 $x^2 - x + 1 = 0$ は実数解を持つ．

解答．(1) この命題は “全て” が省略されているとして, 全ての自然数は整数であるとみなすことができる．そこで全体集合として $\mathbb{N}$ を取れば,

$$\forall x \in \mathbb{N} : x \in \mathbb{Z}$$

と表すことができる．また全体集合を $\mathbb{Z}$ として, “自然数は整数である” の部分を “自然数ならば整数である” と解釈すれば

$$\forall x \in \mathbb{Z} : x \in \mathbb{N} \Rightarrow x \in \mathbb{Z}$$

としても良い．

(2) 全体集合を $\mathbb{R}$ とすれば

$$\forall x \in \mathbb{R} : 0 < x < \pi \Rightarrow \sin x > 0$$

となる．また $(0, \pi)$ で $0 < y < \pi$ をみたす実数 y の全体よりなる集合を表すことにすれば,

$$\forall x \in (0, \pi) : \sin x > 0$$

とも表せる．正確な書き方ではないが, これは

$$0 < \forall x < \pi : \sin x > 0$$

と書き表すこともある．

(3) 方程式 $x^2 - x = 1 = 0$ が実数解を持つとは実数 a で, $a^2 - a + 1 = 0$ をみたすものが少なくとも 1 つ存在することであるから

$$\exists a \in \mathbb{R} : a^2 - a + 1 = 0$$

と表せる．勿論, 文字 a の代わりに x を用いて

$$\exists x \in \mathbb{R} : x^2 - s + 1 = 0$$

と書いても良い．　□

さてここで是非習得してほしいのは "$\forall$" と "$\exists$" を含んでいる命題の否定の作り方である．これをいまから説明しよう．まず全称記号 $\forall$ を含んだ命題の否定については

$$\overline{\forall x \in U : \ p(x)} \Leftrightarrow \exists x \in U : \ \overline{p(x)}$$

となる．これは "任意の $x \in U$ について $p(x)$" の否定は, $P = U$ の否定で, これは $U - P \neq \emptyset$ つまりある $x \in U$ について $x \notin P$ である (少なくとも 1 つ $U - P$ の元が存在する) ことから了解されよう．また存在記号 $\exists$ を含んだ命題の否定については

$$\overline{\exists x \in U : \ p(x)} \Leftrightarrow \forall x \in U : \ \overline{p(x)}$$

となる．これは $\exists x \in U : p(x)$ の否定は $P \neq \emptyset$ の否定であるから, $P = \emptyset$ となり, これは $P^c = U$ と同値である．P^c は $\overline{p(x)}$ の真理集合であるから $\forall x \in U : \ \overline{p(x)}$ と同値になる．

以上より "$\forall$" と "$\exists$" を含んでいる命題の否定を作るには, 次のような機械的な操作を行えば良い．まず全体集合に関する部分はそのままにして $\forall$ と $\exists$ の 2 つの記号のみをを互いに入れ替えて : より右側の自由変数を含んだ命題 $p(x)$ の部分を否定命題 $\overline{p(x)}$ に変更すれば良い．

例題 1.2.4 前節で述べた *De Morgan* の法則について, もっと一般に

$$\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right)^c = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda^c, \quad \left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right)^c = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda^c, \tag{1.2.5}$$

が成り立つことを証明せよ.

証明.　全称記号 $\forall$ と存在記号 $\exists$ を含んだ命題の否定の作り方より

$$\begin{aligned}
& a \in \left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right)^c \\
\iff\ & a \notin \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \\
\iff\ & \overline{\exists\lambda\in\Lambda : a \in A_\lambda} \\
\iff\ & \forall\lambda\in\Lambda : a \notin A_\lambda \\
\iff\ & a \in \bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda^c
\end{aligned}$$

である. 従って

$$a \in \left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right)^c \iff a \in \bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda^c$$

であり, これは $(\cup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda)^c = \cap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda^c$ を示す.

もう 1 つの等式については, 先に示した等式の証明と殆ど同様に, $\forall$ と $\exists$ を含んだ命題の否定を作ることにより示すことができる. これは読者の演習問題とすることにして, ここでは別の方法を用いて証明する. まず $B_\lambda = A_\lambda^c$ とおいて, 集合族 $\{B_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ に既に示した等式を適用して, $(\cup_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda)^c = \cap_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda^c$ が成り立つ. 両辺の補集合をとれば, $B_\lambda^c = A_\lambda$ より $\cup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda^c = (\cap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda)^c$ が成り立つ.　□

ここで次のような例題を考えるのは数列についての解説を行っていないので, 論理的な整合性に欠けるのだが, 次章以降で非常に良く用いる命題であるから, $\forall$, $\exists$ を含んだ命題の否定の作り方の練習の為に解説しておこう.

例題 1.2.5 無限数列 $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ と実数 α が与えられているとする. このとき命題 “任意の $\varepsilon > 0$ についてある番号 N が存在して $n \geq N$ について $|a_n - \alpha| < \varepsilon$ となる” を論理式で表して, その否定形を作れ.

解答.　これは解析学において基本的な命題である “数列 $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ は α に収束する” つまり “$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$” という命題の否定形を作れという問題である. このような命題の否定を作るには命題を $\forall$, $\exists$ 等の記号を用いた論理式で表すことから始める.

まず任意の ε が属すべき全体集合は正の実数全体の集合である. そこで $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ とおくことにする. 従ってこの部分は $\forall\varepsilon \in \mathbb{R}^+$

と表せる．次に "ある番号 N が存在して" の部分については番号とは, 自然数のことであるから $\exists N \in \mathbb{N} : \cdots$ とすれば良い．"番号 $n \geq N$" の箇所については, 自然数 n で $N \geq N$ をみたすものと言う意味であるから $n \in \{N, N+1, N+2, \ldots,\}$ とすれば良いであろう．最後に "$n \geq N$ について $|a_n - \alpha| < \varepsilon$" は, "全ての $n \geq N$ について $|a_n - \alpha| < \varepsilon$" と解釈して

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ : (\exists N \in \mathbb{N} : (\forall n \in \{N, N+1, N+2, \ldots\} : |a_n - \alpha| < \varepsilon))$$

となる．従ってこの命題の否定形を作るには形式的に $\forall$ と $\exists$ を入れ替えて, 最後に不等式の否定形を作ればよい．具体的には次のような同値変形を次々に行う．

$$\begin{aligned}
& \overline{\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ : (\exists N \in \mathbb{N} : (\forall n \in \{N, N+1, N+2, \ldots\} : |a_n - \alpha| < \varepsilon))} \\
\iff & \exists \varepsilon \in \mathbb{R}^+ : \overline{(\exists N \in \mathbb{N} : (\forall n \in \{N, N+1, N+2, \ldots\} : |a_n - \alpha| < \varepsilon))} \\
\iff & \exists \varepsilon \in \mathbb{R}^+ : (\forall N \in \mathbb{N} : \overline{(\forall n \in \{N, N+1, N+2, \ldots\} : |a_n - \alpha| < \varepsilon)}) \\
\iff & \exists \varepsilon \in \mathbb{R}^+ : (\forall N \in \mathbb{N} : (\exists n \in \{N, N+1, N+2, \ldots\} : \overline{|a_n - \alpha| < \varepsilon})) \\
\iff & \exists \varepsilon \in \mathbb{R}^+ : (\forall N \in \mathbb{N} : (\exists n \in \{N, N+1, N+2, \ldots\} : |a_n - \alpha| \geq \varepsilon)).
\end{aligned}$$

□

さて上の例題の解答では, かなり詳しい書き方で論理式を表した．もちろんこのままで何の差し支えもないのであるが, ここまで厳密に表すことは実際上少ない．慣用の崩した書き方では "$\varepsilon \in \mathbb{R}^+$" の部分は, "$\varepsilon > 0$" と書かれる．また "$n \in \{N, N+1, N+2, \ldots\}$" の部分は, n は自然数であるという暗黙の了解のもとで "$n \geq N$" と書く．また括弧も省いて書くことが多い．従ってもとの命題は

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : |a_n - \alpha| < \varepsilon$$

と書き表される．同様に否定形の方は

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall N \in \mathbb{N} : \exists n \geq N : |a_n - \alpha| \geq \varepsilon$$

と書き表される．これを普通の文章に直せば,「ある $\varepsilon > 0$ で次の性質をみたすものが存在する．"任意の番号 N について, ある番号 $n \geq N$ で $|a_n - \alpha| \geq \varepsilon$ となるものが存在する"」となる．

問題 1.2.6 命題 "全ての $x \in \mathbb{R}$ について $x^2 > 0$ である" を論理式で表し, その否定形を書け．また, もとの命題とその否定形の真偽を判定せよ．

1.3　写像と濃度

1.3.1　写像と函数

空でない集合 X と Y があり, X の各元に対して Y の元が 1 つづつ何等かの方法で対応付けられているとき, この対応のことを写像 (map, mapping) と呼ぶ.　今このような写像が与えられたとして, それを文字 f で表わそう. このとき $x \in X$ に対応する Y の元を $f(x)$ で表わす. また f が X から Y への写像であることを明示するために $f : X \to Y$ のように表わす.

X_1 から Y_1 への写像 f_1 と X_2 から Y_2 への写像 f_2 が等しいとは, $X_1 = X_2$ かつ $Y_1 = Y_2$ かつ $f_1(x) = f_2(x)$ が全ての x について成り立つことと定義する.

写像 $f : X \to Y$ について X を f の 定義域 (domain), Y を f の 値域 (range) と呼ぶ. x に対応する Y の元 $f(x)$ を f による x の 像 (image) という. また $x \in X$ が X 全体を動くときの $f(x)$ の全体を $f(X)$ で表わし, f の像という. つまり

$$f(X) \overset{\text{def}}{=} \{f(x) : x \in X\} \tag{1.3.6}$$

である. $f(X)$ は Y を埋め尽くすとは限らず一般に Y の部分集合であることを注意しておこう. より一般に X の部分集合 A について

$$f(A) = \{f(x) : x \in A\} \tag{1.3.7}$$

とおいて f による A の像と呼ぶ.

写像 $f : X \to Y$ について特に, Y が実数の全体 $\mathbb{R}$ または複素数の全体 $\mathbb{C}$ の部分集合であるとき f を 函数 (function) という. 但し f_1, f_2 がそれぞれ X_1 から Y_1, X_2 から Y_2 への写像であるとき, $X_1 = X_2$ であり $f_1(x) = f_2(x)$ が全ての $x \in X_1 = X_2$ について成り立っても値域が違う以上, 同一の写像とはみなさないが, もし Y_1, Y_2 が $\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ の部分集合ならば, 函数としては等しいとみなすことにする.

注意 1.3.1 本書では “関数” という漢字を使わず “函数” という漢字を用いる. もちろん意味は全く同じである.

写像 $f : X \to Y$ と $g : Y \to Z$ が与えられたとき, この 2 つを続けて行うと X から Z への写像が得られる. すなわち X の元 x に対して $g(f(x))$ を対応させる写像である. これを $g \circ f$ で表わし, 写像 f と g の合成 (composition) または積と呼ぶ.　3 つ以上の写像の合成についても同様に定義され, 例えば

$$f : X \to Y, \quad g : Y \to Z, \quad h : Z \to W$$

については, 続けて行って得られる写像を $h \circ g \circ f$ で表わす. つまり $x \in X$ について $h(g(f(x)))$ を対応させる写像である. 写像の合成については結合法則 (associative law)

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f = h \circ g \circ f \tag{1.3.8}$$

が成り立つ.

全射と単射

集合 X から集合 Y への写像 $f : X \to Y$ が与えられたとしよう. このとき $f(X) = Y$ つまり値域が Y と等しいとき, f は 全射 (surjection) または上への (onto) 写像であるという. これはいいかえると, 命題 "任意の $y \in Y$ についてある $x \in X$ で $f(x) = y$ をみたすものが存在する" が成り立つということである.

$$\forall y \in Y : \exists x : y = f(x).$$

また $x_1, x_2 \in X$ について "$x_1 \neq x_2$ ならば $f(x_1) \neq f(x_2)$" が成り立つとき, f は単射 (injection) または 1 対 1(one to one) であるという. f が単射であることは, 対偶を取り $x_1, x_2 \in X$ について "$f(x_1) = f(x_2)$ ならば $x_1 = x_2$" が成り立つことと同値である.

f が全射かつ単射であるとき, f は全単射 (bijection) または 1 対 1 かつ上への写像であるという.

問題 1.3.2 写像 $f : X \to Y$ と写像 $g : Y \to Z$ が与えられているとする. このとき

(1) f, g が単射ならば, $g \circ f$ も単射であることを示せ.

(2) f, g が全射ならば, $g \circ f$ も全射であることを示せ.

$f : X \to Y$ が全単射であるとしよう. このときまず全射であるから, 任意の $y \in Y$ について $f(x) = y$ となる $x \in X$ が取れる. このような x はただ 1 つである. 何故ならばもう 1 つ $f(\tilde{x}) = y$ となる $\tilde{x} \in X$ が存在したとすると, f は単射であるから $f(x) = f(\tilde{x})$ より $x = \tilde{x}$ が結論できる. 従って任意の元 $y \in Y$ について $f(x) = y$ をみたす元 $x \in X$ がただ 1 つ対応付けられたことになる. この対応によって定まる Y から X への写像を f^{-1} で表わし, f の逆写像 (inverse map) という.

問題 1.3.3 写像 $f : X \to Y$ が, 全単射ならば, f^{-1}‘ $: Y \to X$ も全単射であることを示せ.

問題 1.3.4 f が全単射のとき, 次の等式が成り立つことを示せ.

$$(f^{-1})^{-1} = f \tag{1.3.9}$$

$$f \circ f^{-1}(y) = y \quad \forall y \in Y \tag{1.3.10}$$

$$f^{-1} \circ f(x) = x \quad \forall x \in X \tag{1.3.11}$$

但し上式において, 例えば第 2 式は "$\forall y \in Y : f \circ f^{-1}(y) = y$" として ∀ を先に書くべきであるが慣用に従い, 上のように ∀ を後に書いた.

1.3.2　有限集合と無限集合

前の節で 有限集合 (finite set) とは空集合, または有限個の元からなる集合であると定義した. 空でない有限集合は各元に順番を付け $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ の形に表わすことができる. (但し $x_1, x_2, \ldots, x_n$ の中に重複はないとする.) 逆にこのように重複なしに元を列記して表わせる集合は, 有限集合である. このような番号付けは "1 に対して x_1, 2 に対して x_2, ..., n に対して x_n" という対応, すなわち写像を与えている. この写像は全単射であるから, 有限集合とは, 空集合であるか, ある自然数 n について $\{1, 2, \ldots, n\}$ からの全単射が存在する集合であるといっても良い.

有限でない集合を無限集合 (infinite set) という. 特に自然数の全体 $\mathbb{N}$ から集合 A への全単射が存在するとき A は可算集合または可付番集合 (countable set) であるという. 可算集合とは $\{x_1, x_2, x_3, \ldots, \}$ のように各元を重複なく並べることができる集合ということもできる. 有限集合, 可算集合を合わせて高々可算な集合 (at most countable set) という. また高々可算でない集合を非可算集合という.

集合 A から集合 B への全単射が存在するとき, A と B は対等であるという. また対等な集合 A, B は同じ濃度 (power) または基数 (cardinal number) を持つという. 空集合の濃度は 0 と定義し, $n (\in \mathbb{N})$ 個の元からなる有限集合の濃度は n と定義する. また可算集合の濃度は $\mathbb{N}$ と同じであるがこれを特に $\aleph_0$(アレフ・ゼロ, $\aleph$ はヘブライ文字) で表わす. $\mathbb{R}$ または $\mathbb{R}$ と対等な集合の濃度は $\aleph$ で表わす. 詳しくは集合論の本を参照のこと.

以下対等な集合の例をあげよう.

例 1.3.5 (1) 開区間 $I = (0, 1) = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 1\}$ と $\mathbb{R}$ は対等である. 実際 $f(x) = \frac{2x-1}{x(1-x)}$ が I から $\mathbb{R}$ への全単射を与える.

(2) $\mathbb{N}$ は可算集合である, 実際 $\mathbb{N}$ の恒等写像が $\mathbb{N}$ から $\mathbb{N}$ への全単射を与える.

(3) $\mathbb{N}_0 = \{0\} \cup \mathbb{N}$ は可算集合である. 実際 $f(n) = n - 1$ が $\mathbb{N}$ から $\mathbb{N}_0$ への全単射を与える.

問題 1.3.6 上の例で与えられた写像が全単射であることを確かめよ.

定理 1.3.7 有限集合の部分集合は有限集合である.

証明. A を有限集合とする. $A = \emptyset$ ならば A の部分集合は $\emptyset$ のみであり, $\emptyset$ は有限集合であるから定理は成り立つ.

$A \neq \emptyset$ ならば $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ と重複なしに表せる. ここで B を A の部分集合とする. $B = \emptyset$ ならば定義より有限である. また $B \neq \emptyset$ ならば各 $k = 1, 2, \ldots, n$ について $x_k \in B$ か $x_k \notin B$ のどちらかを判定することにより $B = \{x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_m}\}$ で, $1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_m \leq n$ となるように自然数 j_1, j_2, ..., j_m が取れる. よって ℓ に対して x_{j_ℓ} を対応させる写像を考えれば, これは集合 $\{1, 2, \ldots, m\}$ から B への全単射であるから, B は有限集合である. □

定理 1.3.8 可算集合の部分集合は高々可算な集合である.

証明. A を可算集合とする. このとき A は重複なく元を列記することにより $A = \{x_1, x_2, \ldots\}$ と表せる. さて $B \subset A$ とする. B が有限集合ならば, 定義より高々可算である. B が無限集合のときは, 直前の定理の証明と同じように $B = \{x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots,\}$ で, $1 \leq j_1 < j_2 < \cdots$ となるように自然数の (無限) 列 j_1, j_2, ..., が取れる. よって ℓ に対して x_{j_ℓ} を対応させる写像を考えれば, これは $\mathbb{N}$ から B への全単射であるから, B は可算集合である. □

定理 1.3.9 全ての無限集合は可算部分集合を含む.

証明. A を無限集合とする. $x_1 \in A$ を取り, 次に $x_2 \in A \backslash \{x_1\}$ を取る. 以下次々に, $x_n \in A \backslash \{x_1, \ldots, x_{n-1}\}$ を取っていく. A は無限集合ゆえ $A \backslash \{x_1, \ldots, x_{n-1}\} = \emptyset$ となることはないので, このような操作は無限に続けられる. よって $B = \{x_1, x_2, \ldots\}$ とおけば $B \subset A$ であり, B は可算集合である. □

定理 1.3.10 可算集合と可算集合の直積集合は可算である.

証明. A_1, A_2 を可算集合とすると, 全単射 $g_1 : \mathbb{N} \to A_1$, $g_2 : \mathbb{N} \to A_2$ が存在する. そこで $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to A_1 \times A_2$ を $g(m, n) = (g_1(m), g_2(n))$ とおけば g は全単射である. よって $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ が可算であることが示されれば, 全単射 $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ が存在するので, 結局 $g \circ f : \mathbb{N} \to A_1 \times A_2$ が全単射となり, $A_1 \times A_2$ が可算であることが従う.

以上より $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ が可算であることを示せば良い. これには $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ の全ての元が漏れなく 1 度づつあらわれるように並べることが出来ることを示せば良い. 実際

$$
\begin{aligned}
&(1, 1) \\
&(2, 1),\ (1, 2)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&(3,1),\ (2,2),\ (1,3)\\
&\dots\\
&(n-1,1),\ (n-2,2),\ (n-3,3),\dots,\ (2,n-2),\ (1,n-1)\\
&\dots
\end{aligned}
$$

と並べることができるので, $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ は可算である. □

問題 1.3.11 上の定理 *1.3.10* の証明において $g:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to A_1\times A_2$ が全単射であることを示せ.

定理 1.3.12 $\mathbb{Q}$ は可算集合である.

証明. $\mathbb{Q}^+=\{r\in\mathbb{Q}:r>0\}$ とおく. $\mathbb{Q}^+$ の各元 r について互いに素な自然数の組 (p,q) で $r=p/q$ をみたすものが 1 意的に存在する. このとき写像 $f:\mathbb{Q}^+\to\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ を $f(r)=(p,q)$ で定義すれば, f は単射である (各自で示せ). よって $\mathbb{Q}^+$ と $f(\mathbb{Q}^+)$ は対等である. $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ は可算集合であるから, $f(\mathbb{Q}^+)$ は高々可算であり, これと対等な $\mathbb{Q}^+$ も高々可算である. $\mathbb{N}\subset\mathbb{Q}^+$ より, $\mathbb{Q}^+$ は有限集合でないから, $\mathbb{Q}^+$ は可算集合である.

さて $\mathbb{Q}^+$ は可算であるから $\mathbb{Q}^+=\{x_1,x_2,x_3,\dots\}$ とおくことができる, このとき $\mathbb{Q}=\{0,x_1,-x_1,x_2,-x_2,\dots\}$ と表わせるので, $\mathbb{Q}$ は可算集合である. □

定理 1.3.13 A_1, A_2, ... を可算集合の無限列 (つまり $A_1,A_2,\dots$ の一つ一つが可算集合) とする. このとき和集合 $\cup_{n=1}^{\infty}A_n$ も可算集合である.

証明. $A_1=\{a_{1,1},a_{1,2},a_{1,3},\dots,\}$ $A_2=\{a_{2,1},a_{2,2},a_{2,3},\dots,\}$ ... と重複なく表わすことができる. 定理 1.3.10 の証明における (m,n), $m,n\in\mathbb{N}$ の並べ換えの順番を用いて

$$
\begin{aligned}
&x_1=a_{1,1}\\
&x_2=a_{2,1},\ x_3=a_{1,2}\\
&x_4=a_{3,1},\ x_5=a_{2,2},\ x_6=a_{1,3}\\
&\dots
\end{aligned}
$$

とおく. このとき $\cup_{n=1}^{\infty}A_n=\{x_1,x_2,\dots\}$ が成り立つ. しかしながら $x_1,x_2,\dots$ には重複があるかも知れないのでこの重複をなくす為に次の操作を行う.

まず $y_1=x_1$, y_2 については $x_2\neq y_1$ ならば, $y_2=x_2$ とおき, そうでなければ, $x_p\neq y_1$ となる最小の p をとり, この p について $y_2=x_p$ とおく. 以下, y_n までが定まったとして, $x_p\notin\{y_1,y_2,\dots,y_n\}$ となる最小の p を取り, この p について $y_{n+1}=x_p$ とおく. このような操作は, A_1 が可算集合ゆえ, 無限に続けることができる. このとき $\cup_{n=1}^{\infty}A_n=\{x_1,x_2,\dots,\}=\{y_1,y_2,\dots,\}$ であり, $\cup_{n=1}^{\infty}A_n$ は可算集合である. □

注意 1.3.14 1.2 節までは，“の場合と同様である”といって省略した部分はあってもそれ以外のところではかなり詳しい証明を述べた．1.3 節からは，証明を徐々に略して書いている．このような省略を行う主な理由は，“前に同じような考え方をしたのだから，今までの説明をきちんと理解していれば省略をして良いであろう”である．従ってよく理解できないところがあれば，前に似たような考え方をしていないか探してみることが肝要である．

第2章　実数の公理系

解析学の根底にあるのは極限の概念である．高校では “n が限りなく大きくなる時, a_n が α に限りなく近づく” のような言い方で, 極限を直観的に扱ってきたが, これからより高度な理論を展開するためには直観のみでは不可能であり, 厳密な論理に基づく取り扱いを必要とする．ここでは, 高校で学習した極限の理論を一切忘れ, 根本から理論を構成し直してみよう．これには, “実数の持つ幾つかの基本的な性質を公理として仮定し, これらの公理から全てを証明していく” という立場を取るのが理想的であるが, ここではそこまで厳密には行わない.

実数全体の集合を $\mathbb{R}$ とする．これから実数の公理として $\mathbb{R}$ の持つ性質として 17 個の命題を述べる．これらの公理を内容で分類すると, 四則演算の公理, 順序 (大小関係) の公理, 連続の公理の 3 種類に分けられる．この章ではそれぞれに 1 節を設けて解説する．そしてこれらの総体を公理の系という意味で, 実数の公理系と呼ぶことにする.

本来は自然数を定義してから, 具体的に自然数を構成し, さらに整数, 有理数, 実数と次々に定義と構成を行い, 数の範囲を拡張して行く．そして構成された実数の全体 $\mathbb{R}$ が, 以下に述べる 17 個の公理系を全て満足することを証明し, 最後にこのような実数体というものが本質的にただ 1 つしかないことを証明する．以上が終わった後で, 極限や微分積分を解説するというのが理論の流れとしては自然である．この実数の構成までを詳しく解説した本としては [1] があるので, 一読をお勧めする．しかしながら解析学の基礎を学ぶ段階で, このような厳密性にこだわることは得策とは言えない．何故ならば, これではいつまで経っても微分積分の話に進めないからである．そこでここでは便宜的に実数というものが存在するということを受け入れ, 次に述べる公理系を満足するということを知っているというところから出発しよう.

2.1　四則演算の公理

任意の 2 つの実数 a, b について和 (addition) $a+b$ と 積 (multiplication) $a \cdot b$ と呼ばれる演算が定義されている.

(R.1) 任意の $a, b, c \in \mathbb{R}$ について

$$a+b=b+a(\text{和の交換法則 commutative law})$$

(R.2) 任意の $a, b, c \in \mathbb{R}$ について

$$(a+b)+c = a+(b+c) (\text{和の結合法則 associative law})$$

(R.3) $\mathbb{R}$ の要素 0 で, 任意の実数 a について

$$a+0=a$$

をみたすものが存在する (零元の存在).

ここで念の為にそれぞれの公理について "隠された ∀, ∃" などを補って, 論理記号で表せば

$$\begin{aligned}
&(\mathrm{R}.1) \qquad \forall a, b \in \mathbb{R}:\ a+b=b+a \\
&(\mathrm{R}.2) \qquad \forall a, b, c \in \mathbb{R}:\ (a+b)+c=a+(b+c) \\
&(\mathrm{R}.3) \qquad \exists 0 \in \mathbb{R}: (\ \forall a \in \mathbb{R}:\ a+0=a)
\end{aligned}$$

となる. これ以降さらに述べる公理についても, このように論理記号を用いて表す練習を行うこと.

(R.3) で述べられた 0 が一意, つまり (R.3) の性質を持つ 0 という実数はただ一つしかないことを示しておこう. これには $0' \in \mathbb{R}$ も 0 と同じ性質を持つと仮定して, $0'=0$ を示せば良い. 具体的には

$$\forall a \in \mathbb{R}:\ a+0=a \tag{2.1.1}$$

$$\forall b \in \mathbb{R}:\ b+0'=a \tag{2.1.2}$$

と仮定する. 論理式 (2.1.1) において $a=0'$ とおいて $0'+0=0'$ が成り立つ. また (2.1.2) において $b=0$ とおいて $0+0'=0$ が成り立つ. さらに (R.1) より $0'+0=0+0'$ ゆえ

$$0'=0'+0=0+0'=0$$

が成り立つ. 従って $0'=0$ となり, 零元は 1 つしか存在しない. □

それほど良く使われる訳ではないが, 論理式において一意性を表すので記号 ! が用いられることがある. 例えば "(R.3) かつ 0 の一意性" は

$$\exists!\, 0 \in \mathbb{R}:\ \forall a \in \mathbb{R}:\ a+0=a$$

と表される.

(R.4) 任意の実数 a について $\mathbb{R}$ の要素 $-a$ で

$$a+(-a)=0$$

をみたすものが存在する. (和に関する逆元 (inverse element の存在))

零元がただ一つであることから, この公理 (R.4) が意味を持つことに注意しておこう. また $a \in \mathbb{R}$ に対して, $-a$ もただ一つに定まる. ことも証明できる. 実際

$$a + (-a) = 0 \tag{2.1.3}$$

$$a + b = 0 \tag{2.1.4}$$

とすると, (2.1.3) の両辺に右側から b を加えて,

$$\begin{aligned}
& b + (a + (-a)) = b + 0 \\
\Rightarrow\quad & (b + a) + (-a) = b \ \text{((R.2) と (R.3) より)} \\
\Rightarrow\quad & (a + b) + (-a) = b \ \text{((R.1) より)} \\
\Rightarrow\quad & 0 + (-a) = b \ \text{((2.1.4) より)} \\
\Rightarrow\quad & (-a) + 0 = b \ \text{((R.1) より)} \\
\Rightarrow\quad & -a = b \ \text{((R.3) より)}
\end{aligned}$$

となるからである. □

“(R.4) かつ 和の逆元の一意性” を論理記号で表せば

$$\forall a \in \mathbb{R} : \exists ! \ -a \in \mathbb{R} : \ a + (-a) = 0$$

となる.

さて和の逆元の一意性が分かれば, 減法 (引き算) を定義することができる. つまり $a, b \in \mathbb{R}$ について

$$a - b \overset{\text{def}}{=} a + (-b)$$

と定義する.

さて績については

(R.5) 任意の $a, b \in \mathbb{R}$ について

$$a \cdot b = b \cdot a. \text{(積の交換法則)}$$

(R.6) 任意の $a, b, c \in \mathbb{R}$ について

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c). \text{(積の結合法則)}$$

(R.7) $\mathbb{R}$ の要素 1 で任意の実数 a について

$$a \cdot 1 = a$$

をみたすものが存在する. (単位元の存在)

問題 2.1.1 (R.7) をみたす $1 \in \mathbb{R}$ が一意であることを示せ．(零元の一意性の証明において, 和を積に置き換えればほぼ同様にできる).

(R.8) 任意の 0 でない実数 a について $\mathbb{R}$ の要素 a^{-1} で

$$a \cdot a^{-1} = 1$$

をみたすものが存在する． (積に関する逆元の存在)

問題 2.1.2 $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ について (R.8) をみたす $a^{-1} \in \mathbb{R}$ が一意であることを示せ.

積に関する逆元の一意性が分かれば, 除法 (割り算) については

$$a/b = \frac{a}{b} \overset{\text{def}}{=} a \cdot b^{-1}$$

と定義する．但し, $b \neq 0$ とする.

和と積の関係については

(R.9)

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \text{ (分配法則 (distributive law))}$$

公理 (R.1)-(R.9) から, 様々な公式を導くことができる．一例をあげれば

$$a0 = 0a = 0, \ \ (-1) \cdot a = -a, \ \ -(-a) = a,$$

などである．読者は証明を試みて欲しい．但し上式において積を表わすのに $\cdot$ を省略して書いた．これら以外にも成り立つ公式は色々あり, 全て述べて証明を与えるのが良いのであろうが, 読者も公理系から出発して全てを証明していくという立場がどんなに, 労力がかかるか十分理解できたと思うので．紙数の都合や読者の息切れを考え, これくらいで止めにしておこう．これからは高校までに学習した内容で, 四則演算についての公式は既知として話を進める.

四則演算の公理の最後として零元 0 と 単位元 1 の関係について述べよう.

(R.10) $1 \neq 0$

この公理 (R.10) について, 今までの公理と比べて奇異な感じを持つ読者もいるであろうから, 何故この公理が必要かについて考えておこう．尚, 以下の話は厳密な推論に基づくものではないので，単なるお話として読んでほしい.

まず数が 1 つしか存在しないという世界を考えてみよう．そこで $A = \{0\}$ とおいて, $0 + 0 = 0$, $0 \cdot 0 = 0$ とおいて, 和と積を定義する．この世界 A は (R.1)-(R.9) をみたす．つまり (R.1)-(R.9) において $\mathbb{N}$ が現れる所を全て A で置き換えた公理をみたすのである．実際, (R.1)-(R.6) が成り立つことは容

易に分かるし, また (R.7) については, 1 つまり単位元も 0 とおけば $a \in A$ とは $a = 0$ に他ならないから $a \cdot 1 = 0 \cdot 0 = 0 = a$ となり，みたされる．(R.8) については $a \not 0$ が $a \in A$ である限り決してみたされないから, 仮定はつねに偽である．つまり (R.8) は無内容的に成り立つ．また (R.9) も成り立つことは容易にわかる．

以上より, 数が 0 の 1 つしかないという世界でも, (R.1)-(R.9) をみたすのである．そこで, 実数の全体 $\mathbb{R}$ が, このようなつまらない世界ではないという保証が必要になる．これを与えるのが, (R.10) である．この (R.10) があれば, $2 \overset{\text{def}}{=} 1+1$, $3 \overset{\text{def}}{=} 2+1$, $\ldots$, として次々に数を作っていくことができ, $\mathbb{R}$ が全ての自然数を含んでいることがわかる．また自然数 a に対し $-a$ も $\mathbb{R}$ に属すので整数全体も $\mathbb{R}$ に含まれることが分かる．さらには整数 p と自然数 q について p/q も $\mathbb{R}$ に属すので, 有理数全体も $\mathbb{R}$ に含まれることがわかる．つまり (R.10) は, 集合 $\mathbb{R}$ が有理数を全て含み, つまらない世界ではないことを保証する条件なのである． $\square$

2.2 順序の公理

2 つの実数 a, b の間の大小関係 $a \le b$(または $b \ge a$ と書いても同じ) について次の命題が成り立つ. 但し, 全称記号 $\forall =$ 任意の $\cdots$ について, を省略して書いたので適当に補って読むこと.

(R.11) 実数 a について $a \le a$

(R.12) $a \le b$ かつ $b \le a$ ならば $a = b$

(R.13) $a \le b$ かつ $b \le c$ ならば $a \le c$

(R.14) $a \le b$ または $b \le a$ の少なくとも一方が成り立つ

(R.15) $a \le b$ のとき任意の $c \in \mathbb{R}$ について $a + c \le b + c$

(R.16) $a \ge 0$, $b \ge 0$ ならば $ab \ge 0$

以下, $a \le b$ かつ $a \ne b$ のとき $a < b$(または $b > a$) と書くことにしよう．また $a > 0$ ならば a は正, $a < 0$ ならば負, $a \ge 0$ ならば非負という．

さて四則演算の公理と順序の公理 (R.1)-(R.16) からも様々な性質が導かれる．まず a, b が任意に与えられたとき $a \le b$ または $a \ge b$ の少なくとも一方が成り立つが, このとき

(i) $a \le b$ が成り立ち, $a \ge b$ が成り立たない

(ii) $a \le b$ と $a \ge b$ の両方とも成り立つ

(iii) $a \le b$ が成り立たず, $a \ge b$ が成り立つ

どれか 1 つが, そして 1 つのみが成り立つ. (i) の場合に $a = b$ と仮定すると, (R.11) より $a \geq b$ となり矛盾が起きるので, $a \neq b$ である. よってこの場合は $a \leq b$ かつ $a \neq b$ であるから, $a < b$ である. また (ii) の場合は, (R.12) より $a = b$ である. そして (iii) の場合は (i) の場合と同様にして $a > b$ であることがわかる. 従って任意に与えられた実数 a, b について

$$i)\ a < b, \quad ii)\ a = b, \quad iii)\ a > b \tag{2.2.5}$$

のどれか 1 つが, そして 1 つのみが成り立つ (三者択一の法則).

また $1 > 0$ のように, 一見当たり前と思われる性質も証明できる. 厳密に理論を構成しようとするならば, このような性質すら公理から証明しておかなければならない. 参考までに $1 > 0$ の証明を述べておこう. まず準備として,

$$a \geq 0 \Rightarrow -a \leq 0$$
$$b \leq 0 \Rightarrow -b \geq 0$$

を示そう. これは (R.15) より $a \geq 0$ ならば両辺に $-a$ を加えることにより $0 \geq -a$ となることから従う. b についても同様である.

次に

$$\text{任意の } a \in \mathbb{R} \text{ について } a^2 \geq 0 \text{ が成り立つ.} \tag{2.2.6}$$

を示そう. これは $a \geq 0$ ならば (R.16) より $a^2 = aa \geq 0$. また $a \leq 0$ のときも $-a \geq 0$ より $a^2 = (-a)^2 \geq 0$ である.

ここで (2.2.6) において, 特に $a = 1$ とすれば $1 = 1 \cdot 1 \geq 0$ であるが, (R.10) より $1 \neq 0$ ゆえ

$$1 > 0$$

である. 従って $1 > 0$ が証明された.　□

大小関係に関しても, 証明すべき性質, 公式は他にも沢山ある. ここではほんの一端に触れただけだが, 厳密な理論構成を行うということが緻密な思考を要求し, 如何に面倒であるか, 理解できたであろう. それでは高校までに学習した内容で四則演算, 大小関係などの極限に関係しない性質や公式等は既知として話を進めよう.

2.3　連続性の公理

前節までで述べた四則演算と順序の公理 (R.1)-(R.16) に連続性の公理と呼ばれる, もう一つの公理を加えると実数の公理系は完成する. しかしながら一般の微分積分学の教科書に採用されている連続性の公理には各種あり, それ

ぞれ内容によって “上限の存在公理”, “区間縮小法の原理”, “切断公理” 等と呼ばれる．これらについては

$$(\mathrm{R}.1)\text{-}(\mathrm{R}.16)\ \text{と, 1 つの連続性の公理} \Longleftrightarrow (\mathrm{R}.1)\text{-}(\mathrm{R}.16)\ \text{と, 別種の連続性の公理}$$

という意味で, お互いに同値であることが知られている．つまりどれを採用しても同じ理論展開が行えるのである．本書では筆者の好みという, はなはだ曖昧な理由で申し訳ないのであるが, “上限の存在公理” を連続性の公理として採用することにし, 他の種類の連続の公理については, 後で触れることにする．しかしながら “上限の存在公理” について解説を行うにはには多少の準備が必要である．

以下では断わらない限り, 全体集合を $\mathbb{R}$ とし $\mathbb{R}$ の部分集合を考える．そこで部分集合の “部分” を略して単に集合と呼ぶことがあること．また $\emptyset$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ も全て $\mathbb{R}$ の部分集合として考える．

定義 2.3.1 実数 $a, b \in \mathbb{R}$ で $a < b$ をみたすものについて

$$\begin{aligned} [a,b] &\overset{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R} : a \le x \le b\}\ (\text{有界閉区間 (bounded closed interval)}) \\ (a,b) &\overset{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}\ (\text{有界開区間 (bounded open interval)}) \end{aligned}$$

とおく．a, b はそれぞれの区間の端点 (end point) と呼ばれる．また

$$\begin{aligned} [a,b) &\overset{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R} : a \le x < b\}(\text{右半開区間}) \\ (a,b] &\overset{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R} : a < x \le b\}(\text{左半開区間}) \end{aligned}$$

とし,

$$\begin{aligned} [a,\infty) &\overset{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R} : a \le x\} \\ (a,\infty) &\overset{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R} : a > x\} \\ (-\infty,b] &\overset{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R} : x \le b\} \\ (-\infty,b) &\overset{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R} : x < b\} \end{aligned}$$

とおく．上に述べた 8 つの種類の集合と $\mathbb{R} = (-\infty,\infty)$, 加えて $\emptyset$ も $\emptyset = (a,a]$ と表せるので区間の 1 種であるとみなし, これら全てを総称して単に区間 (interval) と呼ぶことにする．

定義 2.3.2 E を $\mathbb{R}$ の部分集合とする．また $M \in \mathbb{R}$ とする．このとき M が E の最大値 (maximum value) であるとは, M が次の 2 条件をみたすときをいう．

(i) $M \in E$

(ii) 任意の $x \in E$ について $x \le M$ が成り立つ．

このとき, M を記号 $\max E$ または $\max_{x\in E} x$, $\max\{x : x \in E\}$ などと表わす. 同様に $m \in \mathbb{R}$ が E の最小値 (minimum value) であるとは

(1) $m \in E$

(2) 任意の $x \in E$ について $x \geq m$ が成り立つ.

ことと定義し, $m = \min E$ または $\min_{x\in E} x$, $\min\{x : x \in E\}$ などと表わす.

さて E が有限集合ならば $\max E, \min E$ が存在する. 実際 $E = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ の形に表わせるので, 三者択一の法則 (2.2.5) を繰り返し用いて, 各元を大きさの順に並べ換えることにより, 最大の元と最小の元を取ることができる. このときの最大元が $\max E$ であり, 最小元が $\min E$ である.

ここで絶対値について考えておこう. 任意の $a \in \mathbb{R}$ について $\max\{a, -a\}$ を $|a|$ で表わして, a の絶対値 (absolute value) と呼ぶ. これは

$$|a| = \begin{cases} a, & a \geq 0 \text{ のとき} \\ -a, & a < 0 \text{ のとき} \end{cases} \tag{2.3.7}$$

と定義しても同じである. このとき

$$|-a| = |a|, \quad -|a| \leq a \leq |a|$$

が成り立つ. 実際, 第 1 の等式については

$$|-a| = \max\{-a, -(-a)\} = \max\{-a, a\} = \max\{a, -a\} = |a|$$

より従う. 第 2 の等式については $a \leq \max\{a, -(-a)\} = |a|$ が成り立つことと, $-a \leq \max\{a, -(-a)\} = |a|$ の両辺を -1 倍することにより, $-|a| \leq a$ が成り立つことより従う.

定理 2.3.3 a, b を任意の実数とするとき, 次が成り立つ.

(1) $|a| \geq 0$ が成り立つ. また "$|a| = 0 \Longleftrightarrow a = 0$" も成り立つ.

(2) $|ab| = |a||b|$

(3) $|a + b| \leq |a| + |b|$ (三角不等式 (triangle inequality))

(4) $||a| - |b|| \leq |a + b|$.

証明.　(1) (2.3.7) より $a \geq 0$ のとき $|a| = a \geq 0$. また $a < 0$ のときも $|a| = -a > 0$. よってどちらの場合でも $|a| \geq 0$ が成り立つ. 次に $|0| = \max\{0, -0\} = \max\{0, 0\} = 0$ であり, $|a| = 0$ ならば $-|a| \leq a \leq |a|$ より $a = 0$ である.

(2) $a \geq 0$ かつ $b \geq 0$ ならば $ab \geq 0$ より, $|ab| = ab = |a||b|$. $a \geq 0$ かつ $b < 0$ ならば $ab \leq 0$ より, $|ab| = -ab = a(-b) = |a||b|$. $a < 0$ かつ $b \geq 0$ ならば $ab \leq 0$ より, $|ab| = -ab = (-a)b = |a||b|$. $a < 0$ かつ $b < 0$ ならば $ab > 0$ より, $|ab| = ab = (-a)(-b) = |a||b|$.

(3) $-|a| \leq a \leq |a|$ と $-|b| \leq b \leq |b|$ を辺々加えて

$$-(|a| + |b|) \leq a + b \leq |a| + |b|$$

はじめの不等式の両辺を -1 倍して $-(a+b) \leq |a| + |b|$. また次の不等式より $a + b \leq |a| + |b|$ よって

$$|a + b| = \max\{a + b, -(a + b)\} \leq |a| + |b|$$

(4) $a = (a+b)+(-b)$ とみて, (3) より $|a| = |(a+b)+(-b)| \leq |a+b|+|-b| = |a+b| + |b|$ よって $|a| - |b| \leq |a + b|$ である. この不等式において a, b を入れ換えて $-(|a| - |b|) = |b| - |a| \leq |b + a| = |a + b|$ よって

$$||a| - |b|| = \max\{|a| - |b|, -(|a| - |b|)\} \leq |a + b|.$$

□

問題 2.3.4 n 個の実数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ について

$$\left|\sum_{k=1}^{n} x_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |x_k|$$

が成り立つことを, n に関する帰納法を用いて示せ.

E が無限集合の場合は, 最大値, 最小値が存在しないこともある. 例えば $E = [0, 3) = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x < 3\}$ とおくと, $\max E$ は存在しない. これは次のように背理法を用いて証明される. $\max E$ が存在すると仮定して $M = \max E$ とおくと, 条件 (i) より $M \in E$. よって $0 \leq M < 3$ である. ところが $0 \leq M < (M + 3)/2 < 3$ より M より大きな E の元 $(M + 3)/2$ が存在することになり, これは条件 (ii) に反し, 矛盾である. □

問題 2.3.5 $E = (0, 3]$ とするとき $\min E$ が存在しないことを示せ.,

このように最大値, 最小値はいつでも存在するとは限らないので, 条件 (i) をみたすかどうかは問題にしないことにして (ii) をみたす数を E の上界 (upper bound) と呼ぶことにしよう. 正確に述べると

定義 2.3.6 集合 $E \subset \mathbb{R}$ について

$$\begin{aligned} & b \text{ (or } a\text{) が, } E \text{ の上界 (or 下界)} \\ \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \;& \forall x \in E : x \leq b \text{ (or } x \geq a\text{, resp.)} \end{aligned}$$

ここで resp. とは respectively(それぞれ) の略であり, 上の定義式において括弧のあらわれる箇所において括弧の左側の言葉を一斉に, 括弧の中味で置き換えるという意味である. この場合は, b が E の上界であることの定義と同時に, a が E の下界 (lower bound) であることの定義がなされているわけである.

定義 2.3.7 集合 $E(\subset \mathbb{R})$ が少なくとも 1 つ上界 (or 下界) を持つとき E は上に (or 下に, *resp.*) 有界であるという. 上にも下にも有界であるとき単に有界であるという. また

$$U(E) = \{b \in \mathbb{R} : b \text{ は } E \text{ の上界 }\} \tag{2.3.8}$$

$$L(E) = \{a \in \mathbb{R} : a \text{ は } E \text{ の下界 }\} \tag{2.3.9}$$

とおく. 勿論 E が上に有界でなければ, $U(E) = \emptyset$ であるし, E が下に有界でなければ, $L(E) = \emptyset$ である.

　さて b が E の上界ならば, $b' \geq b$ をみたす任意の実数 b も E の上界であることは容易に分かる. 従って $b \in U(E)$ ならば, $[b, \infty) \subset U(E)$ が成り立つ. 同様に $a \in L(E)$ ならば, $(-\infty, a] \subset L(E)$ が成り立つ.

例題 2.3.8 集合

$$E = [1, 2),$$

について

$$U(E) = [2, \infty),$$

となることを示せ.

証明.　任意の $x \in E$ を取る. $x \in E$ とは $1 \leq x < 2$ を意味するので $x \leq 2$ が成り立つ. よって 2 は E の上界である. 2 より大きな全ての実数もやはり上界であるから, 結局 $[2, \infty) \subset U(E)$ が成り立つ.

　次に任意の $a \in U(E)$ について背理法により $a \geq 2$ を示そう. これが示されれば, $U(E_1) \subset [2, \infty)$ が成り立つことが従い, 先に示した逆の包含関係と合わせて, $U(E_1) = [2, \infty)$ が成り立つ.

　では $a < 2$ と仮定しよう. このとき $(a + 2)/2 < 2$ が成り立つ. よって $x_0 = \max\{1, (a + 2)/2\}$ とおけば $1 \leq x_0 < 2$ が成り立つ. つまり $x_0 \in E$ である. この x_0 について $x_0 \geq (a + 2)/2 > a$ より, $x_0 \leq a$ は成り立たない. 従って a は E の上界でないことになり矛盾である.　□

問題 2.3.9 集合 $E=(1,2]\cup(3,4)$ について $U(E)=[4,\infty)$, $L(E)=(-\infty,1]$ となることを示せ.

定義 2.3.10 E が上に有界とする. このとき上界の最小値

$$b_0=\min U(E)(=\min\{b\in\mathbb{R}:b \text{ は } E \text{ の上界 }\})$$

が存在すれば b_0 を E の最小上界 (least upper bound), または上限 (supremum) といい $\sup E$ と表す. 同様に E が下に有界のときは

$$a_0=\max L(E)(=\max\{a\in\mathbb{R}:a \text{ は } E \text{ の下界 }\})$$

が存在すれば, a_0 を E の最大下界 (greatest lower bound), または下限 (infimum) といい, $\inf E$ で表わす.

一般に $\mathbb{R}$ の部分集合 A について $-A$ を

$$-A\overset{\text{def}}{=}\{-x:x\in A\} \tag{2.3.10}$$

とおく. 但し $-\emptyset=\emptyset$ とする. このとき $\mathbb{R}$ の部分集合 E について

$$U(-E)=-L(E),\quad L(-E)=-U(E) \tag{2.3.11}$$

が成り立つ. 2 つめの等式も同様であるから 1 つめの等式を示しておこう.

まず実数 x について $y=-x$ とおく. このとき "$x\in -E$" は, "$y\in E$" と同値である. 従って

$$\begin{aligned} & a\in U(-E)\\ \iff & \forall x\in -E\ :\ x\le a\\ \iff & \forall y\in E\ :\ -a\le y\\ \iff & -a\in L(E)\end{aligned}$$

が成り立つ. これは $U(-E)=-L(E)$ を示す. □

式 (2.3.11) の 1 つ目の等式より E に下限が存在すれば $-E$ には上限が存在し, $\sup(-E)=-\inf E$ であることが分かる. また同様に 2 つ目の等式より E に上限が存在すれば $-E$ には下限が存在し, $\inf(-E)=-\sup E$ である.

定理 2.3.11 (上限の必要十分条件) 実数 α が 集合 $E\subset\mathbb{R}$ の上限であるための必要十分条件は次の 2 つの性質が成り立つこと.

(1) $\forall x\in E:x\le\alpha$

(2) $\forall\gamma<\alpha:\exists x\in E:\gamma<x$

証明.　必要性について. α が E の上限ならば, E の上界の集合 $U(E)$ の最小値である. よって $\alpha \in U(E)$ で, α 自身も E の上界である. よって (1) が成り立つ. 次に (2) を否定すると

$$\exists \gamma < \alpha : \forall x \in E : \gamma \geq x$$

となる.　これは実数 γ で, E の上界であり (つまり $\gamma \in U(E)$), さらに $\gamma < \alpha = \min U(E)$ となるものが存在することを意味する. 従って α が上界の最小値であることに矛盾する. よって (2) が成り立つ.

逆に (1) と (2) が成り立つとする. (1) は α が E の上界であることを意味し, $\alpha \in U(E)$ である. 次に $a \in U(E)$, つまり a が E の上界ならば, $a \geq \alpha$ である. 実際 $a < \alpha$ と仮定すると (2) において $\gamma = a$ として $a < x$ となる $x \in E$ が取れる. これは a が E の上界であることに反する. よって $a \geq \alpha$ となる. 従って α は $U(E)$ の最小値, すなわち E の上限である.　□

下限についても同様に

定理 2.3.12 (下限の必要十分条件) 実数 α が 集合 $E \subset \mathbb{R}$ の下限であるための必要十分条件は次の 2 つの性質が成り立つこと.

(i) $\forall x \in E : x \geq \alpha$

(ii) $\forall \gamma > \alpha : \exists x \in E : \gamma > x$

が成り立つ.

問題 2.3.13 定理 2.3.12 を証明せよ.

系 2.3.14 集合 E に $\max E$ が存在すれば, $\sup E$ も存在して $\max E = \sup E$. 同様に集合 E に $\min E$ が存在すれば, $\inf E$ も存在して $\min E = \inf E$.

証明.　$\alpha = \max E$ とおくと. α は, 定理 2.3.11 の (1) をみたす. (2) については, $\gamma < \alpha$ をみたす任意の実数 γ について $x = \alpha$ とおけば, $x = \alpha \in E$ であり, $\gamma < x$ である. よって (2) も成り立つ. 従って $\alpha = \sup E$ である. $\min E = \inf E$ についいも同様である.　□

さて, 今までの四則演算と順序に関する公理は, $\mathbb{R}$ でなくともみたされる. 例えば全ての有理数の集合 $\mathbb{Q}$ も, (R.1)-(R.16) をみたしている. (R.1)-(R.16) をみたす集合は他にもあるが. その中で特に実数の集合 $\mathbb{R}$ を特徴付けるのは次の上限の存在公理である.

(R.17) (上限の存在公理) 空でない上に有界な $\mathbb{R}$ の部分集合は必ず上限を持つ

E が下に有界ならば $-E$ は上に有界ゆえ, これに (R.17) を適用して, $-E$ は上限を持つ. 従って E は下限を持つ. つまり

(R.17') (下限の存在公理) 空でない下に有界な $\mathbb{R}$ の部分集合は必ず下限を持つ

が成り立つ. 勿論 (R.17') から (R.17) を導くこともできる.

これで実数の公理系 (R.1)-(R.17) が全て述べれらた. 以下, この公理系と高校までで学習した四則演算や大小関係に関する事柄を既知として話を進めよう .

定理 2.3.15 E を $\mathbb{R}$ の空でない部分集合とする. このとき E が上に有界ならば

$$U(E) = [\sup E, \infty)$$

が成り立つ. 同様に E が下に有界ならば

$$L(E) = (-\infty, \inf E]$$

が成り立つ.

証明. E が上に有界とし, $\alpha = \sup E$ とおく. このとき α は $U(E)$ の最小値ゆえ, $\alpha \in U(E)$ である. また α よりも大きな実数は全て, E の上界ゆえ, $[\alpha, \infty) \subset U(E)$ が成り立つ. また上限の必要十分条件である, 定理 2.3.11 の (2) より $\gamma < \alpha$ をみたす, 任意の実数 γ は E の上界ではなく, 従って $\gamma \notin U(E)$ である. $(-\infty, \alpha) \subset \mathbb{R} \backslash U(E)$ である. (但し $\backslash$ は差集合を表す記号である). これより $U(E) \subset \mathbb{R} \backslash (-\infty, \alpha) = [\alpha, \infty)$ が成り立つ. 以上より $U(E) = [\alpha, \infty)$ が成り立つ. E が下に有界の場合も同様であるから証明は読者の演習問題とする. □

2.4 拡張された実数系と sup, inf

上限の存在公理から導かれる基本的な性質については, 後節で解説することにして, この節では $\pm\infty$ に関する演算と順序, そして sup, inf の基本的な性質についてもう少し解説をしておこう.

定義 2.4.1 実数全体の集合 $\mathbb{R}$ に記号 $+\infty$ (正の無限大), $-\infty$(負の無限大) を付け加えてできる集合を $\hat{\mathbb{R}} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}) = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ で表す. 集合 $\hat{\mathbb{R}}$ の元について次のように演算と順序を定義するとき, これを拡張された実数系と言う. まず $x, y \in \hat{\mathbb{R}}$ の和, 績, 大小関係については以下のように定義する. 但し混乱のないかぎり $+\infty$ を ∞ と省略して書いていることに注意せよ.

(1) $x,\, y \in \mathbb{R}$ については和, 積, 順序は $\mathbb{R}$ における和, 積, 順序と同一とする.

(2) $x \in \mathbb{R}$ について

$$
\begin{aligned}
&(i)\ \ x+\infty \overset{\text{def}}{=} \infty,\ \infty + x \overset{\text{def}}{=} \infty \\
&(ii)\ \ x+(-\infty) \overset{\text{def}}{=} -\infty,\ -\infty + x \overset{\text{def}}{=} -\infty \\
&(iii)\ \ \infty+\infty = \infty,\ -\infty+(-\infty) = -\infty, \\
&(iv)\infty+(-\infty)\ \text{及び}\ (-\infty)+\infty\ \text{は定義しない}.
\end{aligned}
$$

(3) $x \in \mathbb{R},\, x > 0$ ならば

$$
\begin{aligned}
&(i)\ \ x\cdot\infty = \infty,\ \infty\cdot x = \infty \\
&(ii)\ \ x\cdot(-\infty) = -\infty,\ -\infty\cdot x = -\infty
\end{aligned}
$$

$x \in \mathbb{R},\, x < 0$ ならば

$$
\begin{aligned}
&(iii)\ \ x\cdot\infty = -\infty,\ \infty\cdot x = -\infty, \\
&(iv)\ \ x\cdot(-\infty) = \infty,\ (-\infty)\cdot x = -\infty
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&(v)\ \ \infty\cdot\infty = \infty,\ (-\infty)\cdot(-\infty) = \infty, \\
&(vi)\ \ \infty\cdot(-\infty) = -\infty,\ (-\infty)\cdot\infty = -\infty \\
&(vii)\ \ \infty\cdot 0,\ 0\cdot\infty,\ (-\infty)\cdot 0,\ 0\cdot(-\infty)\ \text{は定義しない}
\end{aligned}
$$

(4) 大小関係については任意の $x \in \mathbb{R}$ について

$$-\infty < x < \infty$$

であると定義する.

さて上のように $\pm\infty$ も含めて考えることにしよう. このとき空でない任意の集合 $E \subset \hat{\mathbb{R}}$ について ∞ は E の上界であり, $-\infty$ は下界であるとみなすことができる. ここでは無用な混乱を避ける為にあくまでも, 考える集合 E は $\mathbb{R}$ の部分集合であり, $\pm\infty$ を元として持たないとしよう. このとき E が前節の意味で上に有界でない (つまり上界となる実数が存在しない) ならば, $\sup E \overset{\text{def}}{=} \infty$ と定義する. 同様に $E \subset \mathbb{R}$ が前節の意味で下に有界でないならば, $\inf E \overset{\text{def}}{=} -\infty$ と定義する. 以上のように定義すれば, 任意の空でない $\mathbb{R}$ の部分集合 E について $\sup E$ と $\inf E$ は, いつでも存在することになる.

注意 2.4.2 集合 E が空集合 $\emptyset$ の場合でも $\sup E,\, \inf E$ を考えることは可能である. まず実数 a について a が, E の上界であるとは, 任意の $x \in E$ について $x \le a$ が成り立つことであるが, これは

$$x \in E \Rightarrow x \le a$$

と論理式で表すことができる．しかしながら，この命題の仮定の部分である "$x \in E$" は $E = \emptyset$ ゆえ満たされることがない．従ってこの命題は無内容的に成り立つということになり，a は E の上界であるということになる．このような議論は，任意の実数 a について成り立つし，$a = \pm\infty$ でも成り立つ．よって $U(\emptyset) = \hat{\mathbb{R}}$ であり，従って $\sup\emptyset = \min\hat{\mathbb{R}} = -\infty$．同様に $L(\emptyset) = \hat{\mathbb{R}}$ が成り立つので，$\inf\emptyset = \max\hat{\mathbb{R}} = \infty$ である．このように全体集合を $\hat{\mathbb{R}} = \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$ として考えれば，$\emptyset$ の上限，下限も一応考えることはできる．しかしながら問題によっては全体集合を $\hat{\mathbb{R}}$ ではなく $[0,\infty]$ などのように考えた方が良いという状況も起こる．この場合には $\sup\emptyset = 0$, $\inf\emptyset = \infty$ となる．従って，ここでは $\sup\emptyset$ や，$\inf\emptyset$ は定義されていないという立場を取っておく．

sup と inf に関する演算

さて集合 E について $U(E)$, $L(E)$ でそれぞれ E の上界の全て，下界の全ての集合を表わした．以下の議論では上界として ∞, 下界として $-\infty$ も含めて考えることにする．

まず 2 つの空でない集合 A, $B(\subset\mathbb{R})$ が与えられていて，$A \subset B$ が成り立っているとしよう．このとき $M \in \hat{\mathbb{R}}$ が B の上界ならば，任意の A の元 a は B の元でもあるから $a \leq M$ が成り立つ．従って M は A の上界でもある．よって

(2.4.12)　　$A \subset B$ ならば $U(B) \subset U(A)$ が成り立つ

同様に B の下界は A の下界でもあるので

(2.4.13)　　$A \subset B$ ならば $L(B) \subset L(A)$ が成り立つ

これらの式を利用すると

定理 2.4.3 A, B を $\mathbb{R}$ の 2 つの空でない集合とし，$A \subset B$ とする．このとき

$$\sup A \leq \sup B, \quad \inf A \geq \inf B$$

が成り立つ．

証明．　第 2 式も同様であるから，第 1 式のみ示す．B が上に有界でなければ，$\sup B = \infty$ ゆえ，$\sup A \leq \sup B$ は成り立つ．次に B が上に有界ならば，B の上界が存在する．B の上界は A の上界でもあるから，A も有界である．$\sup B$ は $U(B)$ の最小値ゆえ，$\sup B \in U(B)$ であり，$U(B) \subset U(A)$ より $\sup B \in U(A)$ である．ここで $\sup A$ は $U(A)$ の最小値であるから，$\sup A \leq \sup B$ が成り立つ．　□

空でない集合 A, $B \subset \mathbb{R}$ について

(2.4.14)　　$$A + B \overset{\mathrm{def}}{=} \{a + b : a \in A,\ b \in B\},$$

とおく．

問題 2.4.4 $\mathbb{N}+\mathbb{N}=\mathbb{N}\backslash\{1\}$ が成り立つことを示せ．但し $\backslash$ は差集合を表す記号である．

定理 2.4.5 $A,\ B\subset\mathbb{R}$ を空でない集合とする．$A,\ B$ がともに上または下に有界であるとき，それぞれ

$$\sup(A+B)=\sup A+\sup B \tag{2.4.15}$$

または

$$\inf(A+B)=\inf A+\inf B \tag{2.4.16}$$

が成り立つ．

証明．　任意の $a\in A$ と $b\in B$ について $a\le\sup A,\ b\le\sup B$ が成り立つことより $a+b\le\sup A+\sup B$ が成り立つ．よって $\sup A+\sup B$ は $A+B$ の上界である．従って $\sup(A+B)\le\sup A+\sup B$ である．

次に任意の $\varepsilon>0$ について定理 2.3.11 の (2) においてそれぞれ $\alpha=\sup A,\ \gamma=\sup A-\varepsilon/2$ また $\alpha=\sup B,\ gamma=\sup B-\varepsilon/2$ とおけば，$\sup A-\varepsilon/2<a,\ \sup B-\varepsilon/2<b$ をみたす $a\in A$ と $b\in B$ が存在する．この $a,\ b$ につついて $a+b\in A+B$ より $a+b\le\sup(A+B)$ である．従って

$$\sup A+\sup B-\varepsilon=\sup A-\frac{\varepsilon}{2}+\sup B-\frac{\varepsilon}{2}<a+b\le\sup(A+B) \tag{2.4.17}$$

が任意の $\varepsilon>0$ について成り立つ．これは $\sup A+\sup B\le\sup(A+B)$ を示す．実際 $\sup A+\sup B>\sup(A+B)$ ならば $\varepsilon_0=\sup A+\sup B-\sup(A+B)$ とおくと，$\varepsilon_0>0$ であり，$\sup A+\sup B-\varepsilon_0=\sup(A+B)$ が成り立つが，これは (2.4.17) において $\varepsilon=2^{-1}\varepsilon_0(>0)$ とおいて得られる不等式より

$$\sup(A+B)=\sup A+\sup B-\varepsilon_0<\sup A+\sup B-2^{-1}\varepsilon_0\le\sup(A+B)$$

となるので矛盾を生ずる．

以上より $\sup A+\sup B\le\sup(A+B)$ と $\sup A+\sup B\ge\sup(A+B)$ が両方成り立つので，$\sup A+\sup B=\sup(A+B)$ である．(2.4.16) に関する不等式についても証明は同様にできるので，読者の演習問題とする．　□

問題 2.4.6 集合 A,B の少なくとも一方が上に (or 下に) 有界でないときでも (2.4.15) (*or 2.4.16*) が成り立つことを示せ．

定理 2.4.5 の証明の中で

定理 2.4.7 任意の $\varepsilon>0$ について

$$\alpha-\varepsilon\le\beta \tag{2.4.18}$$

ならば $\alpha\le\beta$ が成り立つ．

という事実を背理法で証明している．この事実は色々な不等式を証明する際に良く用いられる．

2.5 アルキメデスの原理とガウス記号

定理 2.5.1 (アルキメデス (Archimedes) の原理 I) 任意の実数 x について自然数 n で $x < n$ となるものが存在する.

証明. 背理法を用いる. ある実数 x について $x < n$ をみたす自然数 n が存在しないとすれば, $n \leq x$ が全ての自然数について成り立つ, つまり $\mathbb{N}$ は上に有界である. よって上限の存在公理より $\alpha = \sup \mathbb{N}$ が存在する, 上限の必要十分条件である定理 2.3.11 の (2) において $\gamma = \alpha - 1 (< \alpha)$ とおけば, $m \in \mathbb{N}$ を $\alpha - 1 < m$ となるように取ることができる. よって $\alpha < m + 1$ となるが $m + 1$ は自然数である. これは α が $\mathbb{N}$ の上界であることに矛盾する. $\square$

系 2.5.2 (アルキメデス (Archimedes) の原理 II) 任意の $x > 0$ について $1/n < x$ をみたす自然数 n が存在する.

証明. アルキメデスの原理 I より $1/x < n$ をみたす自然数 n が存在する. このような n は $1/n < x$ をみたす. $\square$

市販の微分積分学の教科書を幾つか参照すればアルキメデスの原理が教科書により様々な形で述べられていることが発見できる. 本書では I, II の 2 つを述べたが, これ以外にもまだあるので興味がある読者は探してみることをお勧めする.

系 2.5.3 任意の実数 x について整数 n で $n \leq x < n + 1$ をみたすものがただ 1 つ存在する.

証明. $x = 0$ のときは $n = 0$ とおけば良い. $x > 0$ のときは $p = 0, 1, 2, \dots$ について順番に $p > x$ となるかどうかを判定し, 初めて $p > x$ となったときに, この判定を止める. アルキメデスの原理 I より $p \geq x$ をみたす $p \in \mathbb{N}$ が少なくとも 1 つは存在するからこのような操作は有限回で終了する. さて $p = p_0$ で初めて $p_0 > x$ となったとすると, $p_0 - 1 \leq x < p_0$ である. よって $n = p_0 - 1$ とおけば良い.

$x < 0$ のときは $-x > 0$ ゆえ $m - 1 \leq -x < m$ となる $m \in \mathbb{Z}$ が取れる. $m - 1 = -x$ ならば $n = -m + 1$ とおくと $n = x < n + 1$ が成り立つ. また $m - 1 < -x < m$ ならば $-m < x < -m + 1$ ゆえ $n = -m$ とおけば良い.

x について $n \leq x < n + 1$ をみたす $n \in \mathbb{Z}$ が 1 つしかないことを示そう. これを示す為に $\ell \in \mathbb{Z}$ も $\ell \leq x < \ell + 1$ を満たすと仮定する. このとき $n < \ell$ ならば n, ℓ はともに整数であるから $n + 1 \leq \ell$ が成り立つので, $x < n + 1 \leq \ell \leq x$ となり矛盾. $\ell < n$ のときも同様に矛盾を生ずるので, $\ell = n$ である. $\square$

定義 2.5.4 $x \in \mathbb{R}$ について上の系により 1 意的に存在することが保証された $n \leq x < n+1$ をみたす整数 n を x の整数部分といい, $[x]$(ガウス (Gauss) 記号) で表わす. このとき任意の $x \in \mathbb{R}$ について

$$[x] \leq x \leq [x] + 1$$

が成り立つことに注意しよう. この不等式は次章以降で用いられる.

定理 2.5.5 (有理数の稠密性) . 任意の 2 つの実数 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ で $\alpha < \beta$ をみたすものについて, ある有理数 $r \in \mathbb{Q}$ で $\alpha < r < \beta$ をみたすものが存在する.

証明. アルキメデスの原理 II より $1/n < \beta - \alpha$ となる $n \in \mathbb{N}$ が存在する. この n について $n\beta > n\alpha + 1$ である. また $m - 1 \leq n\alpha < m$ となる整数 m が取れる $(m = [n\alpha] - 1)$. このとき $m \leq n\alpha + 1 < n\beta$ より $n\alpha < m < n\beta$ が成り立ち, 従って $\alpha < m/n < \beta$ が成り立つ. よって $r = m/n$ とおけば良い. □

2.6 無理数の存在と実数の非可算性

アルキメデスの原理 I は $\mathbb{Q}$ でも成り立つ. すなわち任意の有理数 x について $x < n$ をみたす自然数 n が存在する. しかしながら上限の存在公理を $\mathbb{Q}$ はみたさない. これを示すには無理数の存在を証明しておかなければならない. ここでは $\sqrt{2}$ の存在を示しておこう.

定理 2.6.1 $s^2 = 2$ をみたす正の実数 s がただ 1 つ存在する.

証明. まず s の存在を示そう. $A = \{x \in \mathbb{R} : x > 0,\ x^2 < 2\}$ とおく. このとき $1 \in A$ であるから, A は空ではない. また $x \in A$ について $x < 2$ が成り立つ. 実際 $(2 - x)(2 + x) = 2^2 - x^2 > 4 - 2 > 0$ の両辺を $2 + x (> 0)$ で割ることにより , $2 > x$ であることがわかる. 従って 2 は A の上界であり, A は上に有界である. そこで上限の存在公理より $\sup A$ が存在する. そこで $s = \sup A$ とおく. このとき $1 \in A$ と s は A の上界であることより $1 \leq s$ が成り立つ.

次に $s^2 = 2$ を背理法で示す. はじめに $s^2 < 2$ と仮定して矛盾を導こう. これには自然数 n について不等式

$$\left(s + \frac{1}{n}\right)^2 = s^2 + \frac{2s}{n} + \frac{1}{n^2} \leq s^2 + \frac{2s+1}{n}$$

が成り立つことを利用する. 仮定より $2 - s^2 > 0$ なのでアルキメデスの原理 II より

$$\frac{1}{n} < \frac{2 - s^2}{2s + 1}$$

をみたす自然数 n が存在する．このような n について

$$\left(s+\frac{1}{n}\right)^2 \leq s^2+\frac{2s+1}{n} < s^2+(2s+1)\frac{2-s^2}{2s+1}=2$$

よって, $s+\frac{1}{n}\in A$ であり, $s<s+\frac{1}{n}$ である．これは s が A の上界であることに矛盾する．

今度は $s^2>2$ として矛盾を導く．このときは自然数 n について成り立つ不等式

$$\left(s-\frac{1}{n}\right)^2 = s^2-\frac{2s}{n}+\frac{1}{n^2} > s^2-\frac{2s}{n}$$

を利用する．$s^2>2$ より, アルキメデスの原理 II を用いて

$$\frac{1}{n}<\min\left\{s, \frac{s^2-2}{2s}\right\}$$

をみたす自然数 n が存在する．このような n について

$$\left(s-\frac{1}{n}\right)^2 > s^2-\frac{2s}{n} > s^2-2s\frac{s^2-2}{2s}=2>x^2$$

が全ての $x\in A$ について成り立つ． ここで $s-1/n>0$ と $x>0$ より $(s-\frac{1}{n})^2>x^2$ から $s-1/n>x$ が成り立つことがわかる．よって $s-1/n$ は A の上界であるが, これは $s=\sup A$ が A の上界の最小値であることに反する．

以上より $s^2\leq 2$ と $s^2\geq 2$ が両方成り立つので $s^2=2$ であり, 先に示した $s\geq 1$ より $s>0$ である．従って後は 1 意性を示せば良い．そこで実数 $s_0>0$ が $s_0^2=2$ を満たすと仮定する．このとき $(s_0-s)(s_0+s)=s_0^2-s^2=2-2=0$ であるが, $s_0+s_0>0$ であるから, 両辺を s_0+s で割り, $s_0-s=0$, つまり $s_0=s$ が成り立つ． □

上の定理により定まる s を 2 の平方根 (square root of 2) と言い, $\sqrt{2}$ で表わす．このような論法を一般化して

定理 2.6.2 自然数 n と正の実数 a について, $b^n=a$ をみたす正の実数 n が一意的に存在する．

上の定理によって定まる b を a の n 乗根 (n-th root of a) と呼び $\sqrt[n]{a}=a^{1/n}$ で表わす．上の定理の証明の前に準備を行う．まず自然数 n について $n!=1\cdot 2\cdots n$ とおき, n の階乗と呼ぶ．また $0!=1$ とおく．このとき $p\in\mathbb{N}$, $q\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ について

$$\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \frac{p!}{q!(p-q)!}$$

を 二項係数 (binomial coefficient) と呼ぶ.　を高校では二項係数を ${}_pC_q = \frac{p!}{q!(p-q)!}$ と表したが, 大学では上の記号を用いることが多い. さてこのとき二項展開と呼ばれる次の等式が成り立つことは, 高校で学習済であろう.

$$
\begin{aligned}
(x+y)^n &= \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} x^{n-k}y^k \\
&= x^n + nx^{n-1}y + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}y^2 + \cdots + \frac{n(n-1)}{2}x^2y^{n-2} + nxy^{n-1} + y^n
\end{aligned}
$$

補題 2.6.3 正数 a, b と自然数 n について

(1) $b^n < a$ ならば自然数 p で

$$\left(b + \frac{1}{p}\right)^n < a$$

をみたすものが少なくとも 1 つ存在する.

(2) $b^n > a$ ならば自然数 p で

$$\left(b - \frac{1}{p}\right)^n < a \quad \text{かつ} \quad b > \frac{1}{p}$$

をみたすものが少なくとも 1 つ存在する.

証明.

$$M = \max\left\{\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} : k = 0, 1, \ldots, n\right\}, \quad L = 1 + b + b^2 + \cdots + b^{n-1}$$

とおく. (1) については

$$
\begin{aligned}
\left(b + \frac{1}{p}\right)^n &= \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \frac{b^{n-k}}{p^k} \\
&\leq b^n + M \sum_{k=1}^{n} \frac{b^{n-k}}{p^k} \\
&\leq b^n + \frac{M}{p} \sum_{k=1}^{n} b^{n-k} \\
&\leq b^n + \frac{ML}{p}
\end{aligned}
$$

が成り立つ. よって自然数 p を

$$\frac{ML}{a - b^n} < p$$

を満たすように取れば,

$$\left(b + \frac{1}{p}\right)^n \leq b^n + \frac{M}{p}(b^{n-1} + b^{n-2} + \cdots + b + 1) \leq a$$

が成り立つ.

(2) については

$$
\begin{aligned}
\left(b-\frac{1}{p}\right)^n &= \sum_{k=0}^{n}\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right)(-1)^k\frac{b^{n-k}}{p^k} \\
&\geq b^n - M\sum_{k=1}^{n}\frac{b^{n-k}}{p^k} \\
&\geq b^n + \frac{M}{p}\sum_{k=1}^{n}b^{n-k} \\
&\leq b^n - \frac{ML}{p}
\end{aligned}
$$

より

$$p > \max\left\{\frac{ML}{b^n-a}, \frac{1}{b}\right\}$$

をみたす $p \in bbN$ を取れば良い. □

定理 **??** の証明　$n=1$ のときは明らかゆえ, $n \geq 2$ とする. このとき $A = \{x \in \mathbb{R} : x > 0,\ x^n < a\}$ とおく. はじめに $A \neq \emptyset$ を示す. $x = a/(1+a)$ とおくと $a > 0$ ゆえ $0 < x < 1$ であり, $x^n < x < a$ が成り立つので, $x \in A$ である.

次に A が上に有界であることを示す. まず $a \geq 1$ ならば, 任意の $x \in A$ について $x^n < a < a^n$ であり,

$$a^n - x^n = (a-x)(a^{n-1} + a^{n-2}x + \cdots + ax^{n-2} + x^{n-1})$$

において $a, x > 0$ より $a^{n-1}+a^{n-2}x+\cdots ax^{n-2}+x^{n-1} > 0$ と, $a^n - x^n > 0$ を合わせて, $x < a$ が成り立つ. よって A は上に有界である. また $a < 1$ のときも $x^n < a < 1$ より

$$1 - x^n = (1-x)(1 + x + \cdots + x^{n-2} + x^{n-1})$$

において $1 - x^n > 0$ と $1 + x + \cdots + x^{n-2} + x^{n-1} > 0$ を合わせて $x < 1$ が従い, A は有界である.

さて $b = \sup A$ とおく. このとき $a/(1+a) \in A$ より, $b \geq a/(1+a) > 0$ に注意しよう. そして $b^n = a$ を背理法で示す. まず $b^n < a$ と仮定すると, 上の補題の (1) より $(b+1/p)^n < a$ をみたす自然数 p が存在する. $b+1/p > b > 0$ ゆえ, これは $b + 1/p \in A$ を示し, $b = \sup A$ に矛盾する.

次に $b^n > a$ と仮定すると上の補題の (1) より $(b-1/p)^n > a$, $b - 1/p > 0$ をみたす自然数 p が存在する. これより任意の $x \in A$ について $(b-1/p)^n > a > x^n$ となり, $b - 1/p > 0$, $x > 0$ と合わせて $b - 1/p > x$ が成り立つ. これは $b = \sup A$ が A の上界の最小値であることに反する.

以上より $b^n = a$ が成り立つ. 1 意性を示す為に, 正数 $c > 0$ が $c^n = a$ を満たすと仮定しよう. このとき $c^n = a = b^n$ より

$$0 = c^n - b^n = (c-b)(c^{n-1} + c^{n-2}b + \cdots + cb^{n-2} + b^{n-1})$$

において $c^{n-1} + c^{n-2}b + \cdots + cb^{n-2} + b^{n-1} > 0$ より $c = b$ が成り立つ. □

問題 2.6.4 正数 a と, $m, n \in \mathbb{R}$ について

$$\sqrt[n]{a^n}, \quad (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$$

が成り立つことを示せ.

定理 2.6.5 $\sqrt{2}$ は無理数, つまり有理数でない

証明.　背理法を用いて証明する. そこで $\sqrt{2}$ が有理数と仮定すると, ある $q \in \mathbb{Z}$, $p \in \mathbb{N}$ により $\sqrt{2} = q/p$ と表せる. ここで $\sqrt{2} > 0$ であるから $q > 0$ ゆえ $q \in \mathbb{N}$ である. また共通因数を持てばあらかじめ約しておくことにより, p, q は互いに素 (約数を持たない) として良い. ここで $\sqrt{2} = q/p$ の両辺を 2 乗してから p^2 倍すれば $2p^2 = q^2$ を得る. よって q は 2 を約数に持ち, 自然数 m により $q = 2m$ と表わせる. このとき $2p^2 = q^2 = 4m^2$ より $p^2 = 2m^2$ となるので, p も 2 を約数に持つ. 従って p, q はともに 2 を約数に持つことになり, 互いに素であることに矛盾する. □

ここで有理数の全体 $\mathbb{Q}$ は, 上限の存在公理を満たさないことを示しておこう. 実際には, 命題 “上に有界な $\mathbb{Q}$ の任意の部分集合 E は, $\mathbb{Q}$ 内に上限を持つ” が成り立たないことを示す. これには上に有界な $E \subset \mathbb{Q}$ で, $\sup E$ が有理数でない例を作れば良い. そこで $E = \{x \in \mathbb{Q} : x > 0, ; x^2 < 2\} (\subset \mathbb{Q})$ とおけば良い. 実際このとき E は上に有界であるから $\sup E = r$ とおけば定理 2.6.1 の前半の証明が A のかわりに E について修正無しにそのまま通用して $r^2 = 2$, $r > 0$ が示される (読者は検証を試みよ). 従って $r = \sqrt{2}$ であるが, $\sup E = \sqrt{2}$ は有理数でないことは既に示している. □

さてこのようにして無理数の存在が示されたわけであるが, では, 有理数の全体 $\mathbb{Q}$ と無理数の全体 $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ のどちら集合のほうが要素が多いであろうか? 既に 定理 1.3.12 で $\mathbb{Q}$ が可算集合であることが示されている. では $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ はどうであろうか. 任意の自然数 n について $n + \sqrt{2}$ は無理数であるから, $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ は可算部分集合を含むことは直ちにわかる. 可算集合とは, 無限集合の中で一番要素が少ない (定理 1.3.9 をみよ) ものであるが, $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ は, 可算, 非可算のどちらであろうか? これに答えるのが次の定理である. この定理の証明には任意の実数が 10 進展開できるという事実を利用する. しかしながら 10 進展開を厳密に定義するには, 数列の極限という未だ厳密な定義を行っていない概念を用いる必要がある. 従って今の段階では, 次の定理の厳密な証

明はできないのだが, 仮に 10 進展開と言うものを知っているとして証明を行い, 10 進展開については節をあらためて解説する.

定理 2.6.6 実数の集合 $\mathbb{R}$ は非可算集合である.

証明. まず $I = (0,1) = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 1\}$ が非可算集合であることを示す. I が可算集合ならば, $I = \{x_1, x_2, \ldots,\}$ と全ての要素が漏れなく 1 度づつあらわれるように並べて書くことができる. そこで各 x_n を 10 進小数で表す. 但し $1/2 = 0.49999\cdots$ や, $1/8 = 0.1249999\cdots$ のように少数点以下無限に展開が続くようにしておく. さてそこで

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 0.a_{11}a_{12}a_{13}\cdots a_{1n}\cdots \\
x_2 &= 0.a_{21}a_{22}a_{23}\cdots a_{2n}\cdots \\
x_3 &= 0.a_{31}a_{32}a_{33}\cdots a_{3n}\cdots \\
&\cdots \\
&\cdots \\
x_n &= 0.a_{n1}a_{n2}a_{n3}\cdots a_{nn}\cdots \\
&\cdots
\end{aligned}
$$

と展開できたとしよう. 但し, $a_{ij} \in \{0,1,2,\ldots,9\}$ である. このとき各 $n = 1,2,\ldots,$ について

$$
b_n = \begin{cases} 1, & a_{nn} \in \{0,2,4,6,8\} \\ 2, & a_{nn} \in \{1,3,5,7,9\} \end{cases}
$$

とおいて $y = 0.b_1b_2b_3\cdots$ とおく. このとき $0.111\cdots \le y \le 0.222\cdots$ ゆえ $y \in I$ である. 従って $y = x_k$ を満たす $k \in \mathbb{N}$ が存在する. しかしながら y の小数点以下第 k 位は b_k, また x_k の小数点以下第 k 位は a_{kk} であり $b_k \ne a_{kk}$ である. よって $y \ne x_k$ となり矛盾である.

以上より I は非可算である, $\mathbb{R}$ は I と対等 (例 1.3.5 の (1) をみよ) ゆえ非可算である. □

この定理より $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ も非可算であることがわかる. 何故ならば $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ が可算と仮定すると, $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup (\mathbb{R} - \mathbb{Q})$ より $\mathbb{R}$ が 2 つの可算集合の和集合となり, $\mathbb{R}$ 自身も可算 (定理 1.3.13 をみよ) となってしまい, 矛盾を生じるからである.

以上より, 直観的に述べれば有理数の全体 $\mathbb{Q}$ より無理数の集合 $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ のほうが要素の数が多いということができよう.

第3章　数列

3.1　数列の極限の定義

全ての自然数 $n \in \mathbb{N}$ について実数 a_n が定まっているとき, これらを並べてできる列

$$a_1, a_2, a_3, \ldots$$

を (実) 数列と言い, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ と表す. つまり, (実) 数列とは $\mathbb{N}$ から $\mathbb{R}$ への写像 (函数) である.

高校では直観的に "n を限りなく大きくすると, a_n が限りなく α に近づく" とき数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は α に収束するいい, $a_n \to \alpha (n \to \infty)$ または $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ と表わすと定義した. このように "限りなく大きく" とか "近づく" という, 曖昧で主観的な言葉を用いているのでは定義として受け入れ難い. これから微分積分の理論を展開するのに, これでは不十分であるので厳密な定義をしておこう.

では $a_n \to \alpha$ の定義をどのようにすれば良いかを, 色々な例について考えながら探ってみよう. これには, 収束すると言って良いであろうと思える色々な数列に関して成り立つ共通の性質を抽出し, それを収束することの定義とすれば良い. ここでは話を簡単にするために $a_n \to \alpha$ とは $a_n - \alpha \to 0$ を意味すると考えて, 0 に近づくような数列で考えることにする.

例 3.1.1 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $a_n = (-1)^n/n$, $n = 1, 2, \ldots$ で与えられているとする.

これはいかにも 0 に収束しそうな数列である. さて a_n が 0 に近いとはどのような意味であるかを考えて見よう. 0 から左右に 0.1 の幅を取り, 区間 $(-0.1, 0.1) = \{x \in \mathbb{R} : -0.1 < x < 0.1\}$ を考えて, a_n がこの区間に属せば a_n は 0 にちょっと近いとみなせるであろう. この区間を 0 の 0.1 近傍と呼ぶことにしよう. ここで $x \in (-0.1, 0.1)$ とは絶対値記号を用いて $|x| < 0.1$ と表わせることに注意すれば, a_n が 0 の 0.1 近傍に属すとは $|a_n| < 0.1$ が成り立つことと同値である. $|a_n| = |(-1)^n/n| = 1/n$ より $1/n < 0.1$ つまり $10 < n$ ならば $|a_n| < 0.1$ はみたされる. 実際には n は自然数であるから, $n \geq 11$ のとき, $|a_n| < 0.1$ となる. すなわち $n \geq 11$ をみたす全ての自然数 (番号) について $|a_n| < 0.1$, つまり a_n は 0 の 0.1 近傍に属す.

0.1 近傍ではまだ近いということはできない．0.01 近傍ではどうであろうか．この場合は, $|a_n| = 1/n < 0.01$ より $n > 100$ つまり $n \geq 101$ をみたす全ての自然数について a_n は 0 の 0.01 近傍に属す.

0.01 でも十分ではない, 0.001, 0.0001, ... と次々に 0 の近傍を取ってみよう．この $a_n = (-1)^n/n$ という数列については, 番号の系列を 11, 101, 1001, 10001, ... と取れば, この各番号以降の全ての番号 n について a_n は期待する近傍に属すという性質を持っている.

しかしながら 0.1, 0.01, 0.001, ... という近傍の取り方は恣意的である．もっと一般的な近傍を用いた方が良いのではないだろうか? そこで ε を正の変数として 0 の ε-近傍 $(-\varepsilon, \varepsilon)$ を取って考えてみよう．実際は ε として小さい正の数だけを考えれば良いのだが, “小さい” というのは相対的な概念で 0.1 を小さいと思うか, 大きいと思うかは人によって違うので, ε としては考えられる全ての範囲を動くとして, 任意の正の実数であるとする．さて実数 x が, この近傍に属すとは $|x| < \varepsilon$ が成り立つことと同値である．このとき $|a_n| = 1/n$ より a_n が, 0 の ε-近傍に属すとは, $1/n < \varepsilon$ つまり, $1/\varepsilon < n$ を意味する．番号 n は自然数であるから, ガウス記号を用いて $[1/\varepsilon]$ を考えると, これは

$$\left[\frac{1}{\varepsilon}\right] \leq \frac{1}{\varepsilon} < \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$$

をみたす自然数である．よって $n \geq [1/\varepsilon] + 1$ ならば

$$|a_n| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{[1/\varepsilon] + 1} < \frac{1}{1/\varepsilon} = \varepsilon$$

となる．以上より $\varepsilon > 0$ が任意に与えられたとき, 番号 N を $N = N(\varepsilon) = [1/\varepsilon] + 1$ とおく．ここで N は ε に関係して決まる自然数なので $N(\varepsilon)$ のように表わして対応関係がわかるように表現した．このとき $n \geq N(\varepsilon)$ をみたす全ての n について $|a_n| < \varepsilon$, つまり a_n は 0 の ε-近傍に属す.　□

例 3.1.2 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $a_n = \frac{1}{n^2}$, $n \in \mathbb{N}$ で与えられているとする.

このときも $\varepsilon > 0$ に対応して番号 N を取ることができるかを考えて見よう．この場合は $|a_n| = 1/n^2$ であるから a_n が 0 の ε-近傍に属すとは, $1/n^2 < \varepsilon$, つまり $n > \sqrt{1/\varepsilon}$ と同値である．再びガウス記号を用いて番号 N を $N = N(\varepsilon) = [\sqrt{1/\varepsilon}] + 1$ とおこう．このとき $[\sqrt{1/\varepsilon}] \leq \sqrt{1/\varepsilon} < [\sqrt{1/\varepsilon}] + 1$ が成り立つので, $n \geq N(\varepsilon)$ ならば

$$\begin{aligned} |a_n| &= \frac{1}{n^2} \\ &\leq \frac{1}{N(\varepsilon)^2} \\ &= \frac{1}{([\sqrt{1/\varepsilon}] + 1)^2} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&< \frac{1}{(\sqrt{1/\varepsilon})^2} \\
&= \varepsilon
\end{aligned}
$$

が成り立つ. □

上記 2 つの例のそれぞれについて, $\varepsilon > 0$ に対応する $N(\varepsilon)$ を, $N_1(\varepsilon)$, $N_2(\varepsilon)$ とおこう. つまり $N_1(\varepsilon) = [1/\varepsilon] + 1$ と, $N_2(\varepsilon) = [\sqrt{1/\varepsilon}] + 1$ である. ε が $0 < \varepsilon < 1$ をみたすときは, $N_2(\varepsilon) \leq N_1(\varepsilon)$ が成り立つ. これは $1/n^2$ の方が $(-1)^2/n$ よりも早く 0 に近づくことを意味すると考えられる. しかしながら, どちらの例についても, 任意の $\varepsilon > 0$ について番号 (自然数) $N(\varepsilon)$ で次の性質が成り立つものを取るアルゴリズムが与えることができた.

(3.1.1) $n \geq N(\varepsilon)$ をみたす全ての番号 n について a_n が 0 の ε-近傍に属す

以上の考えをもとにして次のように定義しよう.

定義 3.1.3 $\alpha \in \mathbb{R}$ と $\varepsilon > 0$ について開区間 $U_\varepsilon(\alpha)$ を

$$
\begin{aligned}
U_\varepsilon(\alpha) &\overset{\text{def}}{=} (\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon) \\
&= \{x \in \mathbb{R} : \alpha - \varepsilon < x < \alpha + \varepsilon\} \\
&= \{x \in \mathbb{R} : |x - \alpha| < \varepsilon\}
\end{aligned}
$$

とおいて, α の ε-近傍と呼ぶ.

定義 3.1.4 ($n \to \infty$ の時) 数列 $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ が α に収束する (または α に近づく, α を極限値として持つ) とは, 任意の $\varepsilon > 0$ について自然数 $N = N(\varepsilon)$ を

$n \geq N(\varepsilon)$ をみたす全ての番号 n について a_n が α の ε-近傍 $U_\varepsilon(\alpha)$ に属す

が成り立つように取れるときを言う. これを論理記号を用いて表せば

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : |a_n - \alpha| < \varepsilon.$$

数列 $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ が α に収束する時, $a_n \to \alpha$ $(n \to \infty)$ または $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ と表わす.

ではこの定義にもとづいて, 基本的で良く用いられる数列について極限値に収束することの証明を行っておこう.

例 3.1.5 $a_n = 1/n$, $n \in \mathbb{N}$ のとき $a_n \to 0$ $(n \to \infty)$.

証明. 任意の $\varepsilon > 0$ について自然数 $N = N(\varepsilon)$ を $N = [1/\varepsilon] + 1$ とおく. このとき $[1/\varepsilon] \leq 1/\varepsilon < [1/\varepsilon] + 1 = N$ より $n \geq N$ ならば

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \frac{1}{1/\varepsilon} = \varepsilon$$

が成り立つ. よって数列 $\{1/n\}_{n=1}^\infty$ は 0 に収束する. □

例 3.1.6 $-1 < x < 1$ ならば $\lim_{n\to\infty} x^n = 0$.

証明. $x = 0$ のときは $x^n = 0$ であるから, $\varepsilon > 0$ について $N = N(\varepsilon) = 1$ とおけば $n \geq N(= 1)$ について $|x^n - 0| = |0 - 0| = 0 < \varepsilon$ が成り立つ. よって, このとき $\lim_{n\to\infty} x^n = 0$ は成り立つ.

次に $x \neq 0$ のときを考える. まず $\varepsilon > 1$ のときは $|x^n - 0| = |x|^n < 1 < \varepsilon$ は全ての自然数 n について成り立つので, $N(\varepsilon) = 1$ と取れば良い. そこで $0 < \varepsilon \leq 1$ と仮定しよう. $|x|^1 > 1$ より $h = |x|^{-1} - 1$ とおけば, $h > 0$ であり, $|x| = 1/(1 + h)$. ここで

$$\begin{aligned} \frac{1}{|x^n|} = (1+h)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} h^k \\ &\geq 1 + nh \end{aligned}$$

従って

$$|x^n - 0| = |x|^n \leq \frac{1}{1+nh}$$

である. そこで

$$N = N(\varepsilon) = 1 + \left[\frac{1}{h}\left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right)\right]$$

とおこう. このとき $0 < \varepsilon < 1$ より, $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ であり, $h^{-1}(\varepsilon^{-1} - 1) < N$ が成り立つので $n \geq N$ について

$$\begin{aligned} |x^n - 0| &< \frac{1}{1+nh} \\ &\leq \frac{1}{1+Nh} \\ &< \frac{1}{1+h^{-1}(\varepsilon^{-1}-1)h} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

が成り立つ. これは $\lim_{n\to\infty} x^n = 0$ を示す. □

このように具体的に式で与えられた数列が収束することを示すには, $|a_n - \alpha|$ に関する上からの評価式, すなわち

$$|a_n - \alpha| \leq \text{“}n\text{ に関係した式”}$$

の右辺を考えることが重要である. この際, 上からの評価式としてはできるだけ簡単な式の方が, $N(\varepsilon)$ を定めるのには都合が良い. 例えば, 例 3.1.6 では,

$$|x^n - 0| = \frac{1}{(1+h)^n} < \frac{1}{1+nh}$$

を用いたが, この評価式を使わずに $(1+h)^n = 1+nh+n(n-1)h^2/2+\cdots+h^n > 1 + nh + n(n-1)h^2/2$ より

$$|x^n - 0| < \frac{1}{1+nh+2^{-1}n(n-1)h^2} \tag{3.1.2}$$

を用いて $N(\varepsilon)$ を定めても良い．しかしながら，このときの $N(\varepsilon)$ を定めるには

$$\frac{1}{1+nh+2^{-1}n(n-1)h^2}<\varepsilon$$

という n に関する 2 次不等式を解かねばならず，これより得られる $N(\varepsilon)$ も複雑な形になってしまう．つまり評価式自身としては (3.1.2) の方が (3.1) よりも精度が高いと言えるであろうが，$x^n \to 0$ を証明するだけならば，を用いて $N(\varepsilon)$ を決めるほうが簡単である．

このように具体的に式で与えられた数列が収束することを証明するには上からの評価式の精度は少々犠牲にして，$N(\varepsilon)$ が求めやすい形のものを使えば十分である．

問題 3.1.7 例 *3.1.6* の証明において $(1+h)^n \geq 1+nh$ の代わりに，$(1+h)^n \geq nh$ という不等式を使って証明を試みよ．

例 3.1.8 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

証明． $\sqrt[n]{n} \geq 1$ であることは，両辺とも正であるから両辺を n 乗して $n \geq 1$ となることより従う．そこで $h_n = \sqrt[n]{n}-1$ とおくと $h_n \geq 0$ であり $n \geq 2$ について

$$n=(1+h_n)^n=\sum_{k=0}^{n}\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} h_n^k \geq 1+nh_n+\frac{n(n-1)}{2}h_n^2 > \frac{n(n-1)}{2}h_n^2$$

よって $2/(n-1) > h_n^2$ となり

$$|\sqrt[n]{n}-1| = h_n \leq \sqrt{2/(n-1)} \tag{3.1.3}$$

が成り立つ．

さて $\varepsilon > 0$ が任意に与えられたとしよう．このとき $\sqrt{2/(n-1)} < \varepsilon$ が成り立つためには，この不等式を逆に解いて $1+2/\varepsilon^2 < n$ であれば良い．そこで自然数 $N = N(\varepsilon)$ を $N = 2+[2/\varepsilon^2]$ とおく．このとき $[2/\varepsilon^2] \leq 2/\varepsilon^2 < [2/\varepsilon^2]+1$ が成り立つ．よって $n \geq N$ について

$$\begin{aligned} h_n &\leq \sqrt{2/(n-1)} \\ &\leq \sqrt{\frac{2}{N-1}} \\ &= \sqrt{\frac{2}{[2/\varepsilon^2]+1}} \\ &< \sqrt{\frac{2}{2/\varepsilon^2}} = \varepsilon \end{aligned}$$

以上より任意の $\varepsilon > 0$ について $N = 2+[2/\varepsilon^2]$ と取る時，$n \geq N$ ならば

$$|\sqrt[n]{n}-1| < \varepsilon$$

が成り立つ．これは $\sqrt[n]{n} \to 1$ を示す．　□

次の例に進む前に三角不等式 (定理 2.3.3 の (3)) を一般化した不等式を証明しておこう．

定理 3.1.9 実数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ について

$$\left|\sum_{k=1}^{n} x_k\right| \le \sum_{k=1}^{n} |x_k|$$

が成り立つ．

証明．$n = 2$ の時は三角不等式そのものである．そこで n の時に不等式が正しいとして $n+1$ の時にも不等式が成り立つことを示せば良い (数学的帰納法)．これは次のように示される．

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=1}^{n+1} x_k\right| &= \left|\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right) + x_{n+1}\right| \\ &\le \left|\sum_{k=1}^{n} x_k\right| + |x_{n+1}| \\ &\le \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|\right) + |x_{n+1}| \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} |x_k|.\end{aligned}$$

□

例 3.1.10 $a_n \to \alpha$ ならば $b_n = (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)/n \to \alpha$.

証明．　数列の収束の定義より $a_n \to \alpha$ とは，任意の $\varepsilon > 0$ について自然数 $N(\varepsilon)$ を $n \ge N(\varepsilon)$ ならば $|a_n - \alpha| < \varepsilon$ となるように取れることを意味する．

ここで $\varepsilon > 0$ が任意に与えられたとして $\varepsilon/2$ を考えて $N_1 = N(\varepsilon/2)$ とおけば $n \ge N_1$ について $|a_n - \alpha| < \varepsilon/2$ が成り立つ．このとき $n \ge N_1$ について定理 3.1.9 より

$$\begin{aligned}|b_n - \alpha| &= \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k - \alpha\right| \\ &= \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} (a_k - \alpha)\right| \\ &\le \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} |a_k - \alpha| \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N_1-1} |a_k - \alpha| + \frac{1}{n}\sum_{k=N_1}^{n} |a_k - \alpha| \\ &\le \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N_1-1} |a_k - \alpha| + \frac{n - N_1 + 1}{n} \cdot \frac{\varepsilon}{2}\end{aligned}$$

ここで $N' \in \mathbb{N}$ を

$$\frac{2}{\varepsilon}\sum_{k=1}^{N_1-1}|a_k-\alpha| < N'$$

となるように取り (Archimedes の原理 I より), $N_2 = \max\{N', N_1\}$ とおく. このとき $n \geq N_2$ ならば

$$\begin{aligned}
|b_n-\alpha| &< \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N_1-1}|a_k-\alpha| + \frac{n-N_1+1}{n}\frac{\varepsilon}{2} \\
&\leq \frac{1}{N_2}\sum_{k=1}^{N_1-1}|a_k-\alpha| + \frac{\varepsilon}{2} \\
&< \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
\end{aligned}$$

となる. 以上より $\varepsilon > 0$ に対応して自然数 N_2 を $n \geq N_2$ ならば $|b_n-\alpha| < \varepsilon$ が成り立つように取ることができた. よって $b_n \to \alpha$ である. □

問題 3.1.11 $a_n \to \alpha$ ならば $|a_n| \to |\alpha|$ となることを示せ (不等式 $(||a|-|b|| \leq |a-b|$ を利用せよ).

収束しない数列は発散するという. 発散数列は次のように分類される.

定義 3.1.12 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ について, 以下のように定義する.

(1)

$a_n \to \infty$ (a_n が無限大に発散する)

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 任意の $K > 0$ について $N = N(K) \in \mathbb{N}$ を,

$n \geq N$ ならば $a_n > K$ が成り立つように取れる.

(2)

$a_n \to -\infty$ (a_n が負の無限大に発散する)

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 任意の $K > 0$ について $N = N(K) \in \mathbb{N}$ を,

$n \geq N$ ならば $a_n < -K$ が成り立つように取れる.

(3)

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が振動する

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は発散し, かつ $\pm\infty$ に発散しない

尚 (1) と (2) の場合を合わせて, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は定発散するという.

定理 3.1.13 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は全ての $n \in \mathbb{N}$ について $a_n > 0$ をみたすとする．このとき

$$a_n \to \infty \Longleftrightarrow 1/a_n \to 0$$

が成り立つ．

証明．$\varepsilon > 0$ が任意に与えられたとし, $K = 1/\varepsilon$ とおく．このとき $a_n \to \infty$ より, この $K > 0$ について, ある $N \in \mathbb{N}$ を $n \geq N$ ならば $a_n > K$ となるように取れる．ここで $a_n > 0$ と $K > 0$ より $a_n > K$ から $1/a_n < 1/K = \varepsilon$ を得る．よって $n \geq N$ ならば $|1/a_n - 0| = 1/a_n < \varepsilon$ が成り立つ．よって $1/a_n \to \infty$ である．逆の証明もほぼ同様であるので, 読者の演習問題とする．．
□

問題 3.1.14 $a_n \to \infty \Longleftrightarrow -a_n \to -\infty$ を示せ．

定理 3.1.15 2 つの数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ と $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ について $a_n \leq b_n$ が成り立っているとする．(正確には任意の $n \in \mathbb{N}$ について $an \leq b_n$ と書くべきだが, このように省略して書くことが多い)．このとき $a_n \to \infty$ ならば $b_n \to \infty$. また $b_n \to -\infty$ ならば $a_n \to -\infty$.

証明．　前半のみ証明する．$a_n \to \infty$ より任意の $K > 0$ についてある $N \in \mathbb{N}$ で $n \geq N$ について $a_n > K$ となるものが存在する．このとき $b_n \geq a_n$ より $b_n > K$ が $n \geq N$ について成立する．よって $b_n \to \infty$ である．

注意 3.1.16 上の定理において $a_n \leq b_n$ が全ての $n \in \mathbb{N}$ について成立する必要はない．有限個の n について成り立っていなくとも定理は成り立つ．実際, $a_n \leq b_n$ が成り立たないような n が有限個ならば, そのような n の最大のものをを N_0 とし, 上の証明中で N と $N_0 + 1$ との max を, あらためて N とおき直せば, この場合の証明が得られる．このように有限個の n を除いて仮定が成り立つ場合でも結果が成り立つという定理は数多いが, 一々断わらないので注意してほしい．

例 3.1.17 等比数列 $\{a^n\}_{n=1}^{\infty}$ について

$$\begin{array}{lll} |a| < 1 & \Longrightarrow & a_n \to 0 \\ a = 1 & \Longrightarrow & a_n \to 1 \\ a > 1 & \Longrightarrow & a_n \to \infty \\ a \leq -1 & \Longrightarrow & \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ は振動} \end{array} \tag{3.1.4}$$

まず $|a| < 1$ のときに $a^n \to 0$ となることは例 3.1.6 で既に示した．$a > 1$ のときは $0 < 1/a < 1$ より $1/a^n = (1/a)^n \to 0$ である．よって定理 3.1.13 より, $a^n \to \infty$ となり, ∞ に発散する．$a = 1$ のときは $a^n = 1$ ゆえ $a^n \to 1$ で

ある．$a \leq -1$ のときは $|a^n| = |a|^n \to \infty$ ゆえ, 発散する．実際, 収束すると仮定すれば, 問題 3.1.11 より $|a^n|$ も収束する筈であるが, これは矛盾．さらに $a^{2n} \geq 1$ で, $a^{2n+1} \leq -1$ であるから, ∞ にも $-\infty$ にも発散しない．従ってこのときは振動である．

3.2　極限の性質

この節では収束数列に関する基本的な性質を解説する．

定理 3.2.1 次が成り立つ．

(1) 極限値は存在すればただ 1 つ．つまり $a_n \to \alpha$ かつ $a_n \to \beta$ ならば $\alpha = \beta$.

(2) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が収束すれば, 集合 $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ は有界．

(3) $a_n \leq b_n$ で $a_n \to \alpha$ かつ $b_n \to \beta$ ならば $\alpha \leq \beta$.

証明．(1) $a_n \to \alpha$ より任意の $\varepsilon > 0$ について, ある番号 $N_1(\varepsilon)$ を $n \geq N_1(\varepsilon)$ ならば $|a_n - \alpha| < \varepsilon$ が成り立つように取れる．また $a_n \to \beta$ よりある番号 $N_2(\varepsilon)$ を $n \geq N_2(\varepsilon)$ ならば $|a_n - \beta| < \varepsilon$ が成り立つように取れる．よって $N(\varepsilon) = \max\{N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon)\}$ とおけば, $n \geq N(\varepsilon)$ について

$$0 \leq |\alpha - \beta| \leq |\alpha - a_n| + |a_n - \beta| < 2\varepsilon$$

が成り立つ．従って任意の $\varepsilon > 0$ について $0 \leq |\alpha - \beta| < 2\varepsilon$ が成り立つ．これより $\alpha = \beta$ が成り立つことが結論できる．実際 $\alpha \neq \beta$ ならば, $\varepsilon = |\alpha - \beta|/2 > 0$ とおくと, この ε について $2\varepsilon = |\alpha - \beta| < 2\varepsilon$ となり, 矛盾である．

(2) $\alpha = \lim_{n\to\infty} a_n$ とおく．$\varepsilon = 1$ とおいて, これに対応して $N \in \mathbb{N}$ を $n \geq N$ ならば $|a_n - \alpha| < 1$ が成り立つように取る．このとき $n \geq N$ について $|a_n| \leq |a_n - \alpha| + |\alpha| < |\alpha| + 1$ が成り立つ．ここで $M = \max\{|a_1|, \ldots, |a_{N-1}|, |\alpha|+1\}$ とおけば (有限集合の最大値はつねに存在する), 全ての $n \in \mathbb{N}$ について $|a_n| \leq M$ が成り立つ．よって集合 $\{a_n : n = 1, 2, \ldots\}$ は上界 M, 下界 $-M$ を持つので上にも下にも有界であり, 合わせて有界である．

(3) (1) $a_n \to \alpha$ より, 任意の $\varepsilon > 0$ について, ある番号 $N_1(\varepsilon)$ を $n \geq N_1(\varepsilon)$ ならば $|a_n - \alpha| < \varepsilon$ が成り立つように取れる．また $b_n \to \beta$ よりある番号 $N_2(\varepsilon)$ を $n \geq N_2(\varepsilon)$ ならば $|b_n - \beta| < \varepsilon$ が成り立つように取れる．よって $N(\varepsilon) = \max\{N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon)\}$ とおけば, $n \geq N(\varepsilon)$ について $\beta > b_n - \varepsilon$ と $-\alpha > -a_n - \varepsilon$, $b_n \geq a_n$ より

$$\beta - \alpha > b_n - \varepsilon - (a_n + \varepsilon) = b_n - a_n - 2\varepsilon \geq -2\varepsilon$$

となる．よって $\beta-\alpha>-2\varepsilon$ が, 任意の ε について成り立つ．これは $\beta\geq\alpha$ を示す．実際 $\beta<\alpha$ と仮定すると, $\varepsilon=2^{-1}(\alpha-\beta)$ とおくと $\varepsilon>0$ であるが, この ε について $-2\varepsilon=\beta-\alpha>-2\varepsilon$ となり, 矛盾を生じる．　□

注意 3.2.2 $\mathbb{R}$ の部分集合 E が有界であるとは, E が上に有界かつ下に有界, つまり

$$\exists A,B\in\mathbb{R}:\forall x\in E:A\leq x\leq B \tag{3.2.5}$$

が成り立つものが存在することと定義した．これは

$$existsM\geq 0:\forall x\in E:|x|\leq M \tag{3.2.6}$$

と同値である．

証明．(3.2.6) $\Longrightarrow$ (3.2.5) については, 定理 3.2.1 の (2) の証明中でも触れたように $A=-M$, $B=M$ とおけば良い．

(3.2.5) $\Longrightarrow$ (3.2.6) については, $M=\max\{|A|,|B|\}$ とおけば任意の $x\in E$ について (i) $x\geq 0$ ならば $|x|=x\leq B\leq|B|\leq M$ (ii) $x<0$ ならば $|x|=-x\leq -A\leq|A|\leq M$ が成り立つことよりどちらの場合でも $|x|\leq M$ が成り立つことより従う．　□

定理 3.2.3 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ 実数 a,b,α,β について次が成り立つ．

(1) $a_n\to a$, $b_n\to b$ ならば $\alpha a_n+\beta b_n\to\alpha a+\beta b$

(2) $a_n\to a$, $b_n\to b$ ならば $a_nb_n\to ab$

(3) $a_n\leq c_n\leq b_n$, $a_n\to a$, $b_n\to a$ ならば $c_n\to a$

(4) 全ての $n\in\mathbb{N}$ について $a_n\neq 0$ で $a_n\to a$ かつ $a\neq 0$ ならば $1/a_n\to 1/a$

(5) $a_1\leq a_2\leq\cdots$ かつ $a_n\to a$ ならば $a_n\leq a$ また $a_1\geq a_2\geq\cdots$ かつ $a_n\to a$ ならば $a_n\geq a$.

(6) $a_n\geq A$ で $a_n\to a$ ならば $a\geq A$. また $a_n\leq A$ で $a_n\to a$ ならば $a\leq A$.

(1) の証明．　$|\alpha|+|\beta|\neq 0$ と仮定してよい．(普通このように "$\cdots$ と仮定して良い" と書いたら, こうでない場合は簡単に証明できることを意味する．この場合に本当に簡単に証明できるかどうか自分で考えてみよ.)

任意の $\varepsilon>0$ について, 2 つの自然数 $N_1(\varepsilon)$, $N_2(\varepsilon)$ を

$$|a_n-a|<\varepsilon \text{ for } n\geq N_1(\varepsilon)$$
$$|b_n-b|<\varepsilon \text{ for } n\geq N_2(\varepsilon)$$

が成り立つようにとれる．ここで $N_0(\varepsilon) = \max\{N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon)\}$ とおくと $n \geq N_0(\varepsilon)$ について

$$\begin{aligned} |\alpha a_n + \beta b_n - (\alpha a + \beta b)| &= |\alpha(a_n - a) + \beta(b_n - b)| \\ &\leq |\alpha(a_n - a)| + |\beta(b_n - b)| \\ &= |\alpha||a_n - a| + |\beta||b_n - b| \\ &< |\alpha|\varepsilon + |\beta|\varepsilon \\ &= (|\alpha| + |\beta|)\varepsilon. \end{aligned}$$

この不等式から, $\alpha a_n + \beta b_n \to (\alpha a + \beta b)$ が成り立つことを結論できる．実際 $\varepsilon' = \varepsilon/(|\alpha| + |\beta|)$ とおいて $N(\varepsilon) = N_0(\varepsilon')$ とおけば $n \geq N(\varepsilon)$ について

$$|\alpha a_n + \beta b_n - (\alpha a + \beta b)| < (|\alpha| + |\beta|)\varepsilon' = \varepsilon$$

が成り立つ.. □

注意 3.2.4 c を ε や n に関係しない定数とし上の証明のように任意の $\varepsilon >$ について $N_0 = N_0(\varepsilon)$ を $n \geq N_0$ ならば

$$|x_n - \gamma| < c\varepsilon$$

という不等式式が成り立つように N_0 を取ることが出来るとしよう．このとき $N = N(\varepsilon) = N_0(\varepsilon/c)$ とおくことにより $n \geq N$ ならば

$$|x_n - \gamma| < \varepsilon$$

が成り立ち, $x_n \to \gamma$ が成り立つ．そこでこれからは $n \geq N_0(\varepsilon)$ について

$$|x_n - \gamma| < c\varepsilon$$

が成り立つことを示すことが出来た時点で, $x_n \to \gamma$ の証明は終ったものとする．

以下 (2) 以降の証明を続けよう．

証明． (2) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束するから有界である．従って $M > 0$ を, 任意の $n \in \mathbb{N}$ について $|a_n| \leq M$ が成り立つように取ることが出来る．ここで任意の $\varepsilon > 0$ について N を $n \geq N$ ならば, $|a_n - a| < \varepsilon$ かつ $|b_n - b| < \varepsilon$ が成り立つように取る．このとき $n \geq N$ について

$$|a_n b_n - ab| \leq |a_n(b_n - b) + b(a_n - a)| \leq |a_n||b_n - b| + |b||a_n - a| < (M + |b|)\varepsilon$$

が成り立つ．これは上の注意より $a_n b_n \to ab$ を示す．

(3). 任意の $\varepsilon > 0$ について N を $n \geq N$ ならば, $|a_n - a| < \varepsilon$ かつ $|b_n - a| < \varepsilon$ が成り立つように取る．このとき $a_n \leq c_n \leq b_n$ より $n \geq N$ について

$$a - \varepsilon < a_n \leq c_n \leq b_n < a + \varepsilon$$

が成り立つ．これより $n \geq N$ ならば $|c_n - a| < \varepsilon$ が成り立つので, $c_n \to a$ である．

(4) まず $\varepsilon = |a|/2(> 0)$ について自然数 N_1 を $n \geq N$ ならば $|a_n - a| < |a|/2$ となるように取る．このとき $|a_n| \geq |a| - |a_n - a| > |a| - a|/2 = |a|/2$ が成り立つ．次に $\varepsilon > 0$ が任意に与えられたとして, 自然数 N_2 を, $n \geq N$ ならば

$$\frac{2|a_n - a|}{|a|^2} < \varepsilon$$

が成り立つように取る．このとき $N = \max\{N_1, N_2\}$ とおけば, $n \geq N$ について

$$\begin{aligned} \left|\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a}\right| &= \frac{|a_n - a|}{|a_n||a|} \\ &\leq \frac{|a_n - a|}{(|a|/2)|a|} \\ &= \frac{2|a_n - a|}{|a|^2} < \varepsilon \end{aligned}$$

が成り立つ．

(5) $a_1 \leq a_2 \leq \cdots$ かつ $a_n \to a$ としよう．このとき $a_{n_0} > a$ となる番号 n_0 が存在すると仮定して矛盾を導けば良い．実際 $\varepsilon = a_{n_0} - a > 0$ とおくと, $N_1 = N_1(\varepsilon)$ を $n \geq N_1$ ならば $|a_n - a| < \varepsilon$ が成り立つようにとる．このとき $a_n < a + \varepsilon = a + a_{n_0} - a = a_{n_0}$ が, 任意の $n \geq N_1$ について成り立つ．ここで $n_1 = \max\{N_1, n_0 + 1\}$ とおくと $n_1 > n_0$ と仮定より $a_{n_0} \leq a_{n_1}$ であるが, 同時に $n_1 \geq N_1$ より $a_{n_1} < a_{n_0}$ である．これは矛盾．$a_1 \geq a_2 \cdots$ かつ $a_n \to a$ の場合も同様であるから証明は読者の演習問題としよう．

(6) 全ての n について $a_n \geq A$ で $a_n \to a$ とする．$a \geq A$ を示すには, $a < A$ と仮定して矛盾を導けば良い．実際 $\varepsilon = A - a(> 0)$ とおいて, この ε について N を $n \geq N$ ならば $|a_n - a| < \varepsilon$ が成り立つように取る．このとき $n \geq N$ について

$$a_n < a + \varepsilon = a + A - a = a$$

となり, 仮定に反する．よって $a \geq A$ である．$a_n \leq A$ の時も同様であるであるから証明は読者の演習問題としよう．　□

注意 3.2.5 $a_n > A$ が全ての n について成り立っても, $a = \lim_{n\to\infty} > A$ が成り立つとは限らない．簡単な反例としては $A = 0$, $a_n = 1/n$, $n = 1, 2, \ldots$ の場合を考えてみよ．

問題 3.2.6 $\lim_{n\to\infty} a^n$ については 例 3.1.17 で調べた．これと定理 *3.2.3* をもちいて一般項が次のように表される数列の極限を求めよ．但し $a,\ b,\ c > 0$ とし，定理 *3.2.3* の何番をどこで用いたかをはっきりと明記せよ．

(1) $\dfrac{a^{n+1}}{a^n+1}$　　(2) $\dfrac{a^n - a^{-n}}{a^n + a^{-n}}$

(3) $\dfrac{a^n - b^n}{a^n + b^n}$

問題 3.2.7 $\alpha, a, b, c > 0$ とする．

(1) $\sqrt[n]{\alpha} \to 0$ を示せ．

(2) $\alpha = \max\{a,b,c\}$ とおくとき $\alpha \le \sqrt[n]{a^n+b^n+c^n} \le \alpha\sqrt[n]{3}$ を示せ．

(3)
$$\sqrt[n]{a^n+b^n+c^n} \to \max\{a,b,c\}$$
を示せ．

問題 3.2.8 次を証明せよ

1.
$$(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n) \le 1 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n,$$
但し $a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$. *Hint! Mathematical induction.*(数学的帰納法を用いよ)

2.
$$(1-a_1)(1-a_2)\cdots(1-a_n) < \frac{1}{1+a_1+a_2+\cdots+a_n},$$
但し $0 < a_1, a_2, \ldots, a_n < 1$. とする．(数学的帰納法を用いよ)

3.
$$\lim_{n\to\infty}(1+x)(1+\frac{x}{2})\cdots(1+\frac{x}{n}) = \begin{cases} \infty & x>0 \text{ の時} \\ 1 & x=0 \text{ の時} \\ 0 & x<0 \text{ の時} \end{cases}$$
但し
$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \to \infty \quad (n\to\infty)$$
を用いて良い．

3.3　単調数列

全ての $n \in \mathbb{N}$ について $a_n \leq a_{n+1}$ をみたす数列を (単調) 増加数列 (increasing sequence) という．特に $a_n < a_{n+1}$ が全ての n について成り立っている時は, 狭義増加数列という．また全ての n について $a_n \geq a_{n+1}$ をみたす数列を (単調) 減少数列 (decresing sequence) という．狭義減少数列も同様に定義する．増加もしくは減少数列をあわせて単調数列 (monotone sequence) という．

定理 3.3.1 (ワイエルシュトラスの定理(Weierstrass' theorem))　数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が上に有界で増加ならば, 集合としてみたときの上限 $\sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ に収束する．また $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が下に有界で減少ならば下限 $\inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ に収束する．

証明.　$\alpha = \sup\{a_n\}$ とおくと, α は, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の上限ゆえ $a_n \leq \alpha$. 一方 上限の必要十分条件である定理 2.3.11 の (2) より任意の $\varepsilon > 0$ についてある $N \in \mathbb{N}$ で $\alpha - \varepsilon < a_N$ となるものが存在する．$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は増加数列であるから $n \geq N$ について $\alpha - \varepsilon < a_N \leq a_n \leq \alpha < \alpha + \varepsilon$ がなりたち, これより $|a_n - \alpha| < \varepsilon$ for $n \geq N$. これは $a_n \to a$ を示す．$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が下に有界な減少列の場合は $\{-a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は上に有界な増加列になり, $\sup\{-a_n : n \in \mathbb{N}\}$ $= -\inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ となることから従う．　□

系 3.3.2 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は増加列であるとする．このとき

$$\begin{aligned} \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ は上に有界} &\iff \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ は収束} \\ \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ は上に有界でない} &\iff \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ は } \infty \text{ に発散} \end{aligned}$$

が成り立つ．また $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が減少列ならば

$$\begin{aligned} \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ は下に有界} &\iff \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ は収束} \\ \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ は上に有界でない} &\iff \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ は } \infty \text{ に発散} \end{aligned}$$

が成り立つ．

証明.　$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が増加列であるとする．このとき上の定理より, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が上に有界ならば収束する．逆に $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が収束すれば, $a = \lim_{n\to\infty} a_n$ とおくと, 定理 3.2.3 の (5) より $a_n \leq a$ が任意の $n \in \mathbb{N}$ について成り立つので上に有界である．

次に $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が上に有界でなければ, 任意の $A \in \mathbb{R}$ についてある $N \in \mathbb{N}$ で $a_N > A$ を満たすものが存在する．このとき $n \geq N$ について $a_n \geq a_N$ ゆえ $a_n \geq A$ が成り立つ．これは $a_n \to \infty$ を示す．

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が減少数列ならば, $\{-a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は増加数列で, $\sup\{-a_n : n \in \mathbb{N}\} = -\inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ ゆえ, 前半で示したことを $\{-a_n\}_{n=1}^{\infty}$ に適用すれば,

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が下に有界であることと $a_n \to \inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ が同値であることと, 下に有界でないことと $a_n \to -\infty$ が同値であることが従う. □

定理 3.3.3 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ について $\lim_{n\to\infty} |a_{n+1}|/|a_n| = c$ が存在するとする. このとき

1. $0 \le c < 1$ ならば $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

2. $1 < c \le \infty$ ならば $\lim_{n\to\infty} |a_n| = \infty$

証明. $0 \le c < 1$ のとき $\varepsilon > 0$ を $c < c' = c + \varepsilon < 1$ が成り立つように取る. このときある $N \in \mathbb{N}$ で $n \ge N$ ならば $||a_{n+1}|/|a_n| - c| < \varepsilon$ が成り立つものが存在する. このとき $n \ge N$ について $|a_{n+1}|/|a_n| < c + \varepsilon = c' < 1$ より $|a_{n+1}| < c'|a_n|$ が $n \ge N$ について成り立つ. よって $n \ge N$ について

$$0 \le |a_n| = |a_N| \cdot \frac{|a_{N+1}|}{|a_N|} \cdot \frac{|a_{N+2}|}{|a_{N+1}|} \cdots \frac{|a_n|}{|a_{n-1}|} \le (c')^{n-N}|a_N|$$

が成り立つ. $0 < c' < 1$ より $(c')^{n-N}|a_N| \to 0$ $(n \to \infty)$ であるから, 定理 3.2.3 の (1) より $|a_n| \to 0$ が成り立つ. これより $a_n \to 0$ が従う.

$1 < c \le \infty$ のときは $b_n = 1/|a_n|$ とおくと $\lim |b_{n+1}|/|b_n| = \lim |a_n|/|a_{n+1}| = 1/c < 1$ となる. よって既に証明済みの 1. を適用して $\lim_{n\to\infty} |a_n|^{-1} = \lim_{n\to\infty} b_n = 0$ である. よって $\lim_{n\to\infty} |a_n| = \infty$ が成り立つ. □

注意 3.3.4 $c = \lim_{n\to\infty} |a_{n+1}|/|a_n| = 1$ の場合, 状況は複雑である. $c = 1$ をみたすが発散したり, 収束する数列が存在する. 例えば $\{n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{1/n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$ $\{1\}_{n=1}^{\infty}$ を考えて見よ.

上の定理を用いれば次の事実が成り立つことは容易に示すことができる.

例 3.3.5 (i) $k \in \mathbb{N}$, $a \ge 0$ とすると

$$\lim_{n\to\infty} n^k a^n = \begin{cases} 0, & 0 \le a < 1 \\ \infty, & 1 \le a \end{cases}$$

(ii) 任意の実数 a について

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$$

例 3.3.6 $a_n = (1 + 1/n)^n$ は収束する. (高等学校ではこの極限を用いて $e \stackrel{\text{def}}{=} \lim(1 + 1/n)^n$ と定義したが, $(1 + 1/n)^n$ が収束することの証明は行っていない.)

証明.

$$\begin{aligned} a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= \sum_{k=0}^{n} \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right) \left(\frac{1}{n}\right)^k \\ &= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \cdots \\ &\quad + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right) \end{aligned}$$

となる. 右辺の各項は正であり第 3 項以降は n が増えると増加し, しかも項数も増えるから $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は増加数列である. また

$$\begin{aligned} a_n &\leq 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} \\ &\leq 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} \\ &= 1 + \frac{1-(1/2)^n}{1-(1/2)} < 3 \end{aligned}$$

より $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は上に有界. 以上より $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は上に有界な増加数列である. よって Weierstrass の 定理より収束する. □

e はネピア (Nepia) の定数と呼ばれ, $e = 2.71828\cdots$ であることが知られている.

問題 3.3.7 一般項が次の式で表される数列が収束するならば極限を求めよ. 但し a は正の定数とし m は自然数とする. また収束しないときは, ∞ に発散, $-\infty$ に発散, 振動のどれであるかを判定せよ.

(1) $\dfrac{1^2+3^2+\cdots+(2n-1)^2}{n^3}$　(2) $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k(k+1)}$

(3) $n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1\right)$　(4) $3^n + n(-2)^n$

(5) $\left(1+\dfrac{a}{\sqrt{n}}\right)^n$　(6) $n\left\{\left(1+\frac{a}{n}\right)^m - 1\right\}$

問題 3.3.8 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は全ての $n \in \mathbb{N}$ について $a_n > 0$ を満たすとし, $\lim_{n\to\infty} a_{n+1}/a_n = \alpha$ とする. このとき

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \alpha$$

が成り立つことを示せ.

問題 3.3.9

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e$$

を示せ. *(*上の問題と $a > 0$ について $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ が成り立つことを用いよ*)*.

問題 3.3.10

(1) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)=0$ (2) $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n!}=\infty$
(3) $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n^2]{n!}=1$

を証明せよ.

定理 3.3.11 (区間縮小法の原理) 有界閉区間の列 $I_n=[a_n,b_n]$, $n=1,2,\ldots$ が, $I_1\supset I_2\supset\cdots\supset I_n\supset\cdots$ を満たすとき, それらの全てに共通に含まれる実数が存在する. さらに I_n の 長さ $b_n-a_n\to 0$ ならば, 全ての I_n に共通に含まれる実数はただ *1* つである.

証明. $I_1\supset I_2\cdots$ とは $a_1\le a_2\le\cdots\le b_2\le b_1$ を意味する. $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は上に有界な増加数列ゆえ収束する. その極限値を $a=\sup\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ とおく. 任意の k について b_k は $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の上界であり, a は $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の上界の最小値ゆえ $a\le b_k$ が成り立つ. 次に $\{-b_n\}$ について Weirstrass の定理を適用すれば $-b_n\to\sup\{-b_j:j\in\mathbb{N}\}=-\inf\{b_j:j\in\mathbb{N}\}$ となり, $b_n\to b=\inf\{b_j:j\in\mathbb{N}\}$ であり, $a\le b$ が成り立つ. このとき $a_n\le a\le b\le b_n$ ゆえ区間 $I=[a,b]$ は全ての n について $I\subset I_n$ となる. この区間 I は少なくとも 1 つ以上の実数を要素として持つ. (例えば a)

I_n の長さ $=b_n-a_n\to 0$ のときは, $\lim(b_n-a_n)=0$ より, $b=\lim b_n$ $=\lim(b_n-a_n+a_n)=\lim(b_n-a_n)+\lim a_n=0+a=a$ であるから, 一点 $a=b$ が全ての I_n に共通に含まれる. このような点が他にもう 1 点あれば, それを c とおく. $c<a=b$ ならば, 任意の n について $c\in I_n$ であるから, $a_n\le c$ が成り立つ. よって $a_n\to a\le c$ となるが, これは $c<a$ に反す. 同様に $c>b=a$ でも矛盾が導かれるので, このような点は $a=b$ の 1 点以外に存在しない. □

数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ と自然数の狭義増加列 $1\le n_1<n_2<\cdots$ が与えられた時, 新しい数列 $\{a_{n_k}\}$ を考えることができる. このように元の数列から項の一部 (但し無限個) を取り出し, 順序を逆転させないで並べた数列を元の数列の部分列 (subsequence) という.

定理 3.3.12 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $a\in\mathbb{R}$ に収束するとする. このとき $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の任意の部分列 $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ も a に収束する.

証明. $a_n\to a\ (n\to\infty)$ より任意の $\varepsilon>0$ について $N\in\mathbb{N}$ を, $n\ge N$ ならば $|a_n-a|<\varepsilon$ が成り立つように取れる. このとき $1\le n_1<n_2<\cdots$ より $n_k\ge k$ であるから, $k\ge N$ ならば $n_k\ge N$ となり $|a_{n_k}-a|<\varepsilon$ が成り立つ. よって $a_{n_k}\to a\ (k\to\infty)$ である. □

系 3.3.13 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の任意の部分列は収束するとする. このとき

(1) 任意の部分列について, その極限は共通の値である.

(2) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 自身が (1) の共通の極限に収束する.

証明. $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 自身は $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の部分列であるから収束する. この極限を α とおけば, 定理 3.3.12 より $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の任意の部分列も α に収束する. □

さて収束する数列は有界であったが逆は成立しない. 例えば $a_n = (-1)^{n-1}$ を考えてみよ. しかし

定理 3.3.14 (ボルツァーノ-ワイエルストラスの定理 (Bolzano-Weierstrass' theorem)) 有界な数列は収束する部分列を含む. つまり $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が有界な数列ならば, 自然数の狭義単調増加数列 $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ を $\lim_{k\to\infty} n_k = \infty$ かつ部分列 $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ が $k \to \infty$ のとき収束するように選ぶことができる.

証明. $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は有界ゆえ全ての n について $p \leq a_n \leq q$ が成り立つような実数 p, q が存在する. $I = [p, q]$ とおき, I を二等分する. 二等分された区間の少なくとも一方には a_n が, 無限に多く含まれるからそれを $I_1 = [p_1, q_1]$ とおく (両方ともが無限に多くの a_n を含んでいる時は右側の区間を I_1 とおく). 同じ様に $I_2 = [p_2, q_2]$ を I_1 の二等分された区間のうちで a_n を, 無限に多く含む区間としこの操作を繰り返し順次 I_n を作れば $I, I_1, I_2, \ldots$ は縮小区間の列をなし

$$p_1 \leq p_2 \leq \cdots \leq p_n \leq \cdots q_n \leq \cdots \leq q_2 \leq q_1$$

となる. $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ は上に有界な増加列であるから収束する. そこで $p_n \to \alpha$ とおく. このとき $q_n - p_n = (q-p)/2^n$ より, $q_n = p_n + (q-p)/2^n \to \alpha$ である. ここで $a_{n_1} \in I_1$ となるように n_1 を取り, つぎに n_2 を $n_2 > n_1$ で $a_{n_2} \in I_2$ となるように取りこのような操作を無限に続ければ $1 \leq n_1 < n_2 < \cdots < n_k <$ という自然数の増加列がとれる. $a_{n_k} \in I_k$ より $p_k \leq a_{n_k} \leq q_k$ となる. よって 定理 3.2.3 の (3) より $a_{n_k} \to \alpha$ である. □

定義 3.3.15 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が, 次の条件をみたすときコーシー (*Cauchy*) 列または基本列であるという.

> "任意の $\varepsilon > 0$ について $N = N(\varepsilon)$ を $m,\ n \geq N$ ならば $|a_n - a_m| < \varepsilon$ となるように取れる."

これを論理式で表せば

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall m, n \geq N : |a_m - a_n| < \varepsilon$$

となる.

Cauchy 列の定義は, 一見 数列の収束の定義に似ているが, 不等式の中に極限値が直接あらわれていないことに注意しよう.

定理 3.3.16 (Cauchy の判定条件)　数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ について
$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が収束 $\Longleftrightarrow$ $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が *Cauchy* 列.

証明. $\Longrightarrow$ を示す為に $a_n \to \alpha$ と仮定する. このとき任意に与えられた $\varepsilon > 0$ について N を $n \geq N$ ならば $|a_n - \alpha| < \varepsilon/2$ が成り立つように取る. このとき任意の $m, n \geq N$ について

$$\begin{aligned} |a_n - a_m| &= |a_n - \alpha + \alpha - a_m| \\ &\leq |a_n - \alpha| + |\alpha - a_m| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

が成り立つ.

次に $\Longrightarrow$ を示す為に $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が Cauchy 列であると仮定する. まず $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が有界であることを示そう. これは, $\varepsilon = 1$ として $N_0 \in \mathbb{N}$ を $m,\ n \geq N_0$ ならば $|a_m - a_n| < 1$ が成り立つように取る. このとき特に $m = N_0$ として $|a_{N_0} - a_n| < 1$ が任意の $n \geq N_0$ について成り立つ. よって任意の $n \in \mathbb{N}$ について

$$\min\{a_1, \ldots, a_{N_0-1}, a_{N_0} - 1\} \leq a_n \leq \max\{a_1, \ldots, a_{N_0-1}, a_{N_0} + 1\}$$

となり, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は有界である.

さて $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は有界であるから Bolzano-Weierstrass の定理より $\alpha \in \mathbb{R}$ と $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の部分列 $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ で $a_{n_k} \to \alpha$ $(k \to \infty)$ を満たすものが存在する. 任意に与えられた $\varepsilon > 0$ について $N_1 \in \mathbb{N}$ を $m,\ n \geq N_1$ ならば $|a_m - a_n| < \varepsilon/2$ が成り立つように取る. 次に $k_0 \in \mathbb{N}$ を $k \geq k_0$ ならば $|a_{n_k} - \alpha| < \varepsilon/2$ が成り立つように取る. このとき $j \in \mathbb{N}$ を $j \geq k_0$ かつ $n_j \geq N_1$ となるように取れば, $n \geq N_1$ について

$$|a_n - \alpha| \leq |a_n - a_{n_j}| + |a_{n_j} - \alpha| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

よって $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は α に収束する.　□

3.4　級数

数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ から, 作られた形式

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

を (無限) 級数といい,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \Big(\text{または} \quad \sum a_n \Big)$$

と書く．無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が与えられた時, 各 $n \in \mathbb{N}$ について

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 \cdots + a_n$$

とおき, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ の第 n 部分和という．また部分和の作る数列 $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ を部分和列と呼ぶ.

定義 3.4.1 無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ の部分和列 $\{S_n\}$ が 極限値 S に収束するとき, 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は S に収束するという．また同様に $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ について発散, 定発散, $\pm\infty$ に発散するとは数列 $\{S_n\}$ がそうなるときをいうことにする.

例 3.4.2 $a, r \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ とする．このとき等比級数 $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$ は, $|r| < 1$ のとき $a/(1-r)$ に収束し, $|r| \geq 1$ のとき発散する.

証明．$S_n = \sum_{k=1}^{n} ar^{n-1}$ とおくと, $r \neq 1$ ならば

$$\begin{aligned}(1-r)S_n = S_n - rS_n &= a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} - (ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + ar^n) \\ &= a(1-r^n)\end{aligned}$$

であり, $r = 1$ のときは $S_n = na$ ゆえより,

$$S_n = \begin{cases} a\dfrac{1-r^n}{1-r}, & r \neq 1 \\ na, & r = 1 \end{cases}$$

である．よって $|r| < 1$ ならば $r^n \to 0$ より $a/(1-r)$ に収束し, $|r| \geq 1$ のときは発散する．　□

問題 3.4.3 次の級数の和を求めよ.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$$

具体的に式で与えられた級数の和を厳密に求めることは大抵の場合困難である．また与えられた級数の和を求める前に, まず与えられた級数が収束か発散かを考える必要がある．以下ではこの収束または発散の判定条件を解説しよう．これらの判定条件は, 数値的に無限級数の和を求める時, 誤差の評価にも役にたつ.

定理 3.4.4 (級数についての Cauchy の判定条件) 無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束するための必要十分条件は任意の $\varepsilon > 0$ についてある $N \in \mathbb{N}$ を $m > n \geq N$ ならば

$$|S_m - S_n| = |a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_m| < \varepsilon$$

が成り立つように取れることである.

証明. $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ とおくと, 無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束するとは, 部分和列 $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ が収束することに他ならない. また数列に関する Cauchy の判定条件より, $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ が収束することは, 任意の $\varepsilon > 0$ についてある $N \in \mathbb{N}$ を $p, q \geq N$ ならば $|S_p - S_q| < \varepsilon$ が成り立つように取れることである. このとき $m > n \geq N$ ならば $p = m$, $q = n$ として $|S_m - S_n| < \varepsilon$ が成り立つ.

逆に任意の $\varepsilon > 0$ についてある $N \in \mathbb{N}$ を $m > n \geq N$ ならば $|S_m - S_n| < \varepsilon$ が成り立つように取れるとすると, $p,\ q \geq N$ について $m = \max\{p, q\}$, $n = \min\{p, q\}$ とおく. このとき $p \neq q$ ならば $m > n \geq N$ であり $|S_p - S_q| = |S_m - S_n| < \varepsilon$ が成り立つし, $p = q$ ならば $|S_p - S_q| = 0 < \varepsilon$ となる. □

系 3.4.5 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束すれば, $a_n \to 0$.

証明. $\varepsilon > 0$ が任意に与えられたとする. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束するから上の定理を用いて, $m > n \geq N$ ならば $|S_m - S_n| < \varepsilon$ となるように取れる. このとき $n = m - 1$ とすると, $|S_m - S_n| = |S_m - S_{m-1}| = |a_m| < \varepsilon$ となる. m は $N + 1$ 以上で任意ゆえ, $N_1 = N + 1$ とおくと結局, $m \geq N_1$ について $|a_m| < \varepsilon$ が成り立つことになるので, $a_m \to 0 (m \to \infty)$ が成り立つ. □

定義 3.4.6 各項 a_n が, 全て $a_n \geq 0$ を満たす時, 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ を正項級数という.

ここで $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が正項級数ならば部分和列 $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ は n について増加数列であることに注意しよう.

定理 3.4.7 正項級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ について,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ が収束 } \iff \{S_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ が上に有界}$$

証明. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束することの定義は, $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ が収束することであった. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は正項級数であるから, $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ は n について増加であるので系 3.3.2 より $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ が収束することと, 上に有界であることは同値である. 従って $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束することと $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ が上に有界であることも同値である. □

正項級数の部分和列は増加であるので, 発散する場合は ∞ に発散する. つまり $-\infty$ に発散したり振動することはない.

無限級数の収束, 発散は部分和列の収束発散で定義されるから, 次の定理は数列に関する対応する定理から直ちに導くことができる.

定理 3.4.8 (1) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ と $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ がともに収束すれば, $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ も収束して,

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束すれば, 任意の実数 c について $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$ も収束して,

$$\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = c\sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

(3) 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ において有限個の項を取りかえても, 取り除いても, つけ加えても, 収束, 発散は変らない.

3.5 集積値, 上極限, 下極限

定義 3.5.1 実数 $\alpha \in \mathbb{R}$ が数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の集積値 (*accumulation point*) であるとは, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の適当な部分列 $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ で $a_{n_k} \to \alpha$ $(k \to \infty)$ をみたすものが存在するときをいう. また $a_{n_k} \to \infty$ をみたす部分列が存在する時, ∞ は数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の集積値であるといい, $a_{n_k} \to -\infty$ みたす部分列が存在する時, $-\infty$ は数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の集積値であるという.

定理 3.5.2 $\alpha \in \mathbb{R}$ が数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の集積値である為の必要十分条件は, 任意の $\varepsilon > 0$ について $|a_n - \alpha| < \varepsilon$ をみたす n が無限個存在することである.

証明. $\alpha \in \mathbb{R}$ が集積値であれば, $a_{n_k} \to \alpha$ $(k \to \infty)$ をみたす部分列が取れる. よって任意の $\varepsilon > 0$ について $k_0 \in \mathbb{N}$ を $k \geq k_0$ ならば $|a_{n_k} - \alpha| < \varepsilon$ をみたすようにとれる. 従って $n = n_{k_0}, n_{k_0+1}, \ldots$ と無限個の n について $|a_n - \alpha| < \varepsilon$ がみたされる.

逆に $|a_n - \alpha| < \varepsilon$ が無限個の n についてみたされるとする. はじめに $\varepsilon = 1$ とおいて $|a_{n_1} - \alpha| < 1$ をみたす, $n_1 \in \mathbb{N}$ を取る. 次に $\varepsilon = 1/2$ について $|a_n - \alpha| < 1/2$ をみたす n は無限個存在するから, $n_2 \in \mathbb{N}$ を $n_2 > n_1$ かつ $|a_{n_2} - \alpha| < 1/2$ をみたすように取ることができる. このような操作を次々に行い $|a_{n_k} - \alpha| < 1/k$ が成り立つ $n_k \in \mathbb{N}$ が取れたとする. このとき $|a_n - \alpha| < 1/(k+1)$ をみたす n は無限個存在するから, $n_{k+1} \in \mathbb{N}$ を $n_{k+1} > n_k$ かつ $|a_{n_{k+1}} - \alpha| < 1/(k+1)$ をみたすように取れる. 従ってこのような操作は無限に行うことができる. このとき $1 \geq n_1 < n_2 < \cdots$ であり, 部分列 $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ は $|a_{n_k} - \alpha| < 1/k \to 0$ $(k \to \infty)$ をみたすので, $a_{n_k} \to \alpha$ $(k \to \infty)$ が成り立つ. □

問題 3.5.3 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ と正数 $\varepsilon > 0$ について条件

$$|a_n - \alpha| < \varepsilon \text{ をみたす } n \text{ が無限個存在する}$$

は, 条件

任意の $N \in \mathbb{N}$ について $|a_n - \alpha| < \varepsilon$ をみたす $n \geq N$ が少なくとも 1 つ存在する

と同値であることを示せ.

定理 3.5.4 ∞ が数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の集積値である為の必要十分条件は, 任意の $A \in \mathbb{R}$ について $a_n > A$ をみたす $n \in \mathbb{N}$ が取れること．また $-\infty$ が数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の集積値である為の必要十分条件は, 任意の $A \in \mathbb{R}$ について $a_n < A$ をみたす $n \in \mathbb{N}$ が取れること．

証明． 後半も同様であるから前半のみを示す．まず ∞ が $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の集積値ならば, $a_{n_k} \to \infty$ をみたす, 部分列 $\{a_{n_k}\}_{k=1}6\infty$ が取れる．よって任意の A について, $k_0 \in \mathbb{N}$ を $k \geq k_0$ ならば $a_{n_k} \ > A$ が成り立つように取れる．

逆に, 任意の $A \in \mathbb{R}$ について $a_n > A$ をみたす $n \in \mathbb{N}$ が取れるならば, まず $A_1 = 1$ とおいて $A = A_1$ について, $a_{n_1} > A_1$ をみたす $n_1 \in \mathbb{N}$ を取る．次に $A_2 = \max\{2, a_1, \ldots, a_{n_1}\}$ とおいて, $A = A_2$ に対応する $n_2 \in \mathbb{N}$ を $a_{n_2} > A_2$ が成り立つように取る．このような操作を次々に行い A_k と $n_k \in \mathbb{N}$ が定まったとする．このとき $A_{k+1} = \max\{k+1, a_1, \ldots, a_{n_k}\}$ とおいて, $A = A_k$ に対応する $n_k \in \mathbb{N}$ を $a_{n_k} > A_k$ が成り立つように取ることができる．従ってこのような操作は無限に行うことができる．さて $\{A_k\}$ の取り方から, $1 \geq n_1 < n_2 < \cdots$ が成り立つので, $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ は $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の部分列であり, $a_{n_k} > A_k \geq k \to \infty$ $(k \to \infty)$ より $a_{n_k} \to \infty$ である． □

定理 3.5.5 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $a_n \to \alpha \in \hat{\mathbb{R}}$ を満たせば α は $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ のただ 1 つの集積値である．

証明． まず $\alpha \in \mathbb{R}$ の場合を稽えよう．$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 自身は $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の部分列で $a_n \to \alpha$ ゆえ α は集積値である．また β を集積値とすると, $a_{n_k} \to \beta$ $(k \to \infty)$ をとなる部分列 $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ が存在する．定理 3.3.12 より $a_{n_k} \to \alpha$ がわかるから, $\beta = \alpha$ である．よって α 以外に集積値は存在しない．

$\alpha = \pm\infty$ の場合もほぼ同様なので証明は読者の演習問題とする． □

定理 3.5.6 任意の数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ について集積値 ($\pm\infty$ も許す) は少なくとも 1 つ存在する．

証明． 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が有界ならば Bolzano-Weierstrass の定理 3.3.14 より収束する部分列が存在する．この極限値は定義により, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の集積値である．

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が上に有界でなければ, 任意の $A \in \mathbb{R}$ について $a_n > A$ をみたす n が存在する．よって定理 3.5.4 により, ∞ は $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の集積値である．$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が下に有界でないときも, 同様に $-\infty$ が集積値となる． □

収束する数列 (但し $\pm\infty$ も極限値として許す) の集積値は, ただ 1 つで極限と一致するが, 収束しない数列については, 状況は複雑になりうる．例えば $\{1 + (-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$ の集積値は 0 と 2 の 2 つである．

問題 3.5.7 数列 $\{1+(1)^n\}_{n=1}^{\infty}$ の集積値全体の集合を S とおけば $S=\{0,2\}$ が成り立つことを示せ.

もっと極端な例をあげよう.

例 3.5.8 有理数の全体 $\mathbb{Q}$ は可算集合ゆえ $\mathbb{Q}=\{x_1,x_2,x_3,\ldots\}$ と表わせるので, これを利用して, 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を各 $n\in\mathbb{N}$ について $a_n=x_n$ とおくことにより定義すれば, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の集積値の全てがなす集合は拡張された実数系 $\hat{\mathbb{R}}$ である.

証明. $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の集積値全体の集合を S とおく. まず任意の $\alpha\in\mathbb{R}$ と $\varepsilon>0$ について有理数の稠密性 (定理 2.5.5) より区間 $(\alpha-\varepsilon,\alpha+\varepsilon)$ の中に有理数が無数に存在することが従う (どうしてか考えよ). よって定理 3.5.2 より α は集積値であり, これより $\mathbb{R}\subset S$ がわかる. また任意の A について A より大きな有理数と小さな有理数はともに存在する. よって定理 3.5.4 より $\pm\infty$ は $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の集積値である. □

定義 3.5.9 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の集積値全体の集合を S とする. このとき S の上限 $\sup S$ を, 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の上極限 (limit superior) といい, $\limsup_{n\to\infty} a_n$ または $\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n$ で表わす. また S の下限 $\inf S$ を, 下極限 (limit inferior) といい, $\liminf_{n\to\infty} a_n$ または $\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n$ で表わす.

定理 3.5.6 より, 任意の数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ について $S\neq\emptyset$ ゆえ $\limsup a_n=\sup S$ と $\liminf a_n=\inf S$ は必ず存在する.

定理 3.5.10 有界な数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ について $\alpha=\limsup_{n\to\infty} a_n$ とおくと, α は $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の集積値である. すなわち, α は $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の集積値の集合の最大値である. 下極限についても, $\beta=\liminf_{n\to\infty} a_n$ は集積値の集合の最小値である.

証明. 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の集積値全体の集合を S とおく. このとき $\alpha=\limsup_{n\to\infty} a_n=\sup S$ である. ここで各 $k\in\mathbb{N}$ について $\varepsilon=1/k$ とおいて定理 2.3.11 の (2) を用いれば $\alpha-1/k<\alpha_k$ をみたす $\alpha_k\in S$ が存在する. このとき $\alpha_k\leq\alpha$ が成り立つことと合わせて $\alpha_k\to\alpha(k\to\infty)$ が従うここで定理 3.5.2 より $|\alpha_1-a_{n_1}|<1$ をみたす, $n_1\in\mathbb{N}$ が取れる. 同様に定理 3.5.2 より $|\alpha_2-a_n|<1/2$ をみたす n は無数にあるから, $n_2>n_1$ かつ $|\alpha_2-a_{n_2}|<1/2$ をみたす $n_2\in\mathbb{N}$ が取れる. 以下次々に $1\leq n_1<n_2<\cdots<n_k<$ をみたす自然数の列を $|\alpha_k-a_{n_k}|<1/k$ となるように取っていけば, $\alpha_k\to\alpha$ より

$$\lim_{k\to\infty} a_{n_k}=\lim_{k\to\infty}(a_{n_k}-\alpha_k)+\lim_{k\to\infty}\alpha_k=\alpha$$

である. よって α は部分列 $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ の極限ゆえ, 集積値である. 下極限についても同様である. □

定理 3.5.11 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は有界な数列であるとする．このとき, $\alpha \in \mathbb{R}$ が $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の上極限である為の必要十分条件は次の 2 条件がともに成り立つこと．

(1) 任意の $\varepsilon > 0$ についてある $N \in \mathbb{N}$ で $n \geq N$ ならば $a_n < \alpha + \varepsilon$ が成り立つように取れる．

(2) 任意の $\varepsilon > 0$ について $\alpha - \varepsilon < a_n$ をみたす, n が無数に存在する．

また $\beta \in \mathbb{R}$ が $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の下極限である為の必要十分条件は

(1') 任意の $\varepsilon > 0$ についてある $N \in \mathbb{N}$ で $n \geq N$ ならば $\alpha - \varepsilon < a_n$ が成り立つように取れる．

(2') 任意の $\varepsilon > 0$ について $a_n < \alpha + \varepsilon$ をみたす, n が無数に存在する．

証明． 下極限についても同様であるから, 上極限についてのみ示そう．

α が $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の上極限とする．(1) を背理法で示す．この為に (1) の否定を作れば "ある $\varepsilon > 0$ で任意の $N \in \mathbb{N}$ について $a_n \geq \alpha+\varepsilon$ をみたす, $n \geq N$ が存在するようなものが取れる" となる．従って $a_{n_k} \geq \alpha + \varepsilon$ をみたす部分列 $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ が取れる．数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が有界であるから, この部分列も有界である．よって Bolzano-Wierstrass の定理 3.3.14 より $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ の部分列 $\{a_{n_{k_j}}\}_{j=1}^{\infty}$ で収束するものが取れる．この極限を α' とおくと, $\alpha' \geq \alpha+\varepsilon > \alpha$ である．部分列の部分列は, もとの数列の部分列でもあるから α' は $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の集積値である．これは α が集積値の上限であることに矛盾する．

(2) については, 定理 3.5.10 より α も $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の集積値であるので, 定理 3.5.2 より直ちに従う．

今度は (1), (2) がみたされる時, α が上極限であることを示そう．まず (1) より任意の $\varepsilon > 0$ について $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の集積値は $\alpha + \varepsilon$ 以下であることがわかる．つまり S を $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の集積値全体の集合とすると $\sup S \leq \alpha + \varepsilon$ である．$\varepsilon > 0$ は任意ゆえ, これは $\sup S \leq \alpha$ を示す．

次に $\varepsilon > 0$ が任意に与えられたとして, (1) の N を取る．このとき $n \geq N$ をみたす全ての n について $a_n < \alpha+\varepsilon$ が成り立つ．また (2) より $\alpha-\varepsilon < a_n$ をみたす, n は無数にあるから, 結局 $\alpha - \varepsilon < a_n < \alpha + \varepsilon$ をみたす $n \in \mathbb{N}$ は無数に存在する．よって定理 3.5.2 より α は $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の集積値である．よって $\alpha \in S$ である．以上より $\sup S \leq \alpha$ かつ $\alpha \in S$ であるから α は S の最大値であり, $\sup S = \limsup_{n\to\infty} a_n$ と一致する． □

定理 3.5.12 次は全て同値である．

(1) 数列 $\{a_n\}$ は有限な実数に収束する．

(2) 数列 $\{a_n\}$ は *Cauchy* 列である.

(3) 数列 $\{a_n\}$ は有界でただ 1 つの集積値を持つ.

(4) $\limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n \in \mathbb{R}$.

証明. (1) $\Longleftrightarrow$ (2) は定理 3.3.16 のところで既に証明している.

(1) $\Longrightarrow$ (3) は, 定理 3.5.5 で示した.

(3) $\Longrightarrow$ (4) を示す. ただ 1 つの集積値を α とおけば $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の集積値全体の集合 S は $S = \{\alpha\}$ となる. よって $\limsup_{n\to\infty} a_n = \sup S = \alpha$ であり, かつ $\liminf_{n\to\infty} a_n = \inf S = \alpha$ が成り立つ.

(4) $\Longrightarrow$ (1) を示す. (4) より $\alpha = \limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n \in \mathbb{R}$ とおけば, 定理 3.5.11 の (1) と (1') より任意の $\varepsilon > 0$ について $N_1 \in \mathbb{N}$ と $N_2 \in \mathbb{N}$ をそれぞれ $n \geq N_1$ ならば $a_n < \alpha + \varepsilon$, $n \geq N_2$ ならば $\alpha - \varepsilon < a_n$ が成り立つように取れる. よって $N = \max\{N_1, N_2\}$ とおけば $n \geq N$ について

$$\alpha - \varepsilon < a_n < \alpha + \varepsilon$$

つまり $|a_n - \alpha| < \varepsilon$ が成り立つ. これは $a_n \to \alpha$ $(n \to \infty)$ を示す. $\square$

第 4 章　函数の極限

第 1 章で, 値域が $\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ の部分集合である写像のことを函数と言うと定義した. この章では, 定義域が $\mathbb{R}$ のある部分集合となっていて値域が $\mathbb{R}$ である函数のみを扱うので, 特に断らない限り函数と言えば, このようなものを指すことにする.

4.1　多項式, 有理函数

これから良く使う函数の例をあげておこう

例 4.1.1 恒等函数 (identity function) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) \equiv x$$

で定義される函数を恒等函数という. 但し $f(x) \equiv x$ とは $f(x) = x$ が定義域内で任意の x について成り立つことを表わす記号である.

例 4.1.2 定数函数 (constant function) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$c \in \mathbb{R}$ とする.

$$f(x) \equiv c$$

で定義される函数を定数函数という.

例 4.1.3 多項式函数 (polynomial function) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$a_0, a_1, \ldots, a_n$ を実定数とし (但し $a_n \neq 0$)

$$f(x) \equiv a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

の形の函数を多項式函数という. また $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ をそれぞれ定数項, 1 次の係数, 2 次の係数, ..., n 次の係数という.

例 4.1.4 有理函数 (polynomial function)
$p(x) = a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$ を n 次の多項式函数, $q(x) = b_0+a_1x+\cdots+c_mx^m$ を m 次の多項式とする. このとき

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

の形をした函数を, 有理函数という. この函数の定義域は分母が 0 とならない x の集合, つまり $\{x \in \mathbb{R} : p(x) \neq 0\}$ とする. また値域は $\mathbb{R}$ としておく.

注意 4.1.5 式で表わされた函数の場合, 定義域は式が定義される限り, 出来るだけ大きく取るのが通常である. 例えば上記の有理函数の定義域などは, そのように取っている. また $f(x) = \sqrt{x}$ などは, 根号の中は 0 以上の数であるべきなので, 定義域は $\{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\} = [-, \infty)$ とする. 値域については, 一番大きく取り $\mathbb{R}$ としておけば, 大抵の場合は差し支えない. 但し逆函数を考える場合は, この限りではない. この場合は f の定義域が D ならば, 値域を $f(D)$ に制限すれば $f : D \to f(D)$ は, 上への函数になるので都合が良い.

定義 4.1.6 函数 $f : D \to Y$ が上への 1 対 1 の函数であるとき, 任意の $y \in Y$ について $y = f(x)$ となる $x \in D$ がただ 1 つ存在する. この y について x を与える対応も函数である. これを 函数 f の逆函数といい $f^{-1} : Y \to D$ または $x = f^{-1}(y)$ で表わす.

4.2 函数の極限

さて $h > 0$ とし $a \in \mathbb{R}$ が与えられているとする. このとき

$$U_h^*(a) = (a-h, a+h) - \{a\}$$

とおく. このとき

$$\begin{aligned} U_h^*(a) &= \{x \in \mathbb{R} : a-h < x < a \text{ または } a < x < a+h\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : 0 < |x-a| < h\} \end{aligned}$$

が成り立つ. このような形の集合を a の削除 h-近傍 (a の h-近傍から a を削除した集合) ということにしよう. ここでは暫くの間, 扱う函数 f の定義域 D はある $h > 0$ について a の削除 h-近傍を含むとする. すなわち f は点 a のまわりで定義されているが, a 自身では定義されていなくとも良いとする. このような仮定のもとで次のように定義する.

定義 4.2.1 (函数の極限)　ある $\delta = \delta(\varepsilon)$ を "$x \in D$ かつ $0 < |x-a| < \delta$ ならば $|f(x) - A| < \varepsilon$" が成り立つように取れるとき, $f(x)$ は $x \to a$ のとき, 極限 (limit) A に収束 (converge) するといい, $f(x) \to A$ $(x \to a)$ または $\lim_{x \to a} f(x) = A$ と表わす. また論理式で定義の内容を表わせば

$$\forall \varepsilon >: \exists \delta > 0 : \forall x \in D \cap U_\delta^*(a) : |f(x) - A| < \varepsilon \tag{4.2.1}$$

となる.

上の定義において $\delta > 0$ は ε に関係しているので, $\delta(\varepsilon)$ と書くことがあるのは数列の場合と同様である. また f の定義域は a の削除近傍 $U_h^*(h) = \{x \in \mathbb{R} : 0 < |x-a| < h\}$ を含むので $0 < \delta < h$ をみたす δ について $0 < |x-a| < \delta$

ならば $x \in D$ がみたされることになる．従ってはじめから $0 < |x-a| < \delta$ をみたす δ を取っておけば, $x \in D$ という条件は考える必要がない.

さて収束しない数列は発散 (diverge) するという．特に $\pm\infty$ に発散することは次のように定義される.

定義 4.2.2 $x \to a$ のとき, 次のように定義する.

$$
\begin{aligned}
& f(x) \to \infty \ (\ f(x) \text{ が無限大に発散する}) \\
\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}\ & \text{任意の } K > 0 \text{ について } \delta = \delta(K) > 0 \text{ を,} \\
& x \in D \text{ かつ } 0 < |x-a| < n\delta \text{ ならば } f(x) > K \text{ が成り立つように取れる.}
\end{aligned}
$$

2.

$$
\begin{aligned}
& f(x) \to -\infty (f(x) \text{ が負の無限大に発散する}) \\
\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}\ & \text{任意の } K > 0 \text{ について } \delta = \delta(K) > 0 \text{ を,} \\
& x \in D \text{ かつ } 0 < |x-a| < \text{ ならば } f(x) < K \text{ が成り立つように取れる.}
\end{aligned}
$$

例 4.2.3 $c \in \mathbb{R}$ とする．定数函数 $f(x) \equiv c$ については, 任意の点 a について

$$\lim_{x \to a} f(x) = c$$

が成り立つ.

証明．任意に与えられた $\varepsilon > 0$ について $\delta = 1$ とおくと, $0 < |x-a| < 1$ について $|f(x) - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon$ が成り立つ．実際には δ は $\delta > 0$ でありさえすれば何でも良い.　□

例 4.2.4 恒等函数 $f(x) = x$ については, 任意の点 $a \in \mathbb{R}$ について

$$\lim_{x \to a} f(x) = a$$

が成り立つ.

証明．任意に与えられた $\varepsilon > 0$ について $\delta = \delta(\varepsilon) = \varepsilon$ とおくと, $0 < |x-a| < \varepsilon$ について $|f(x) - a| = |x - a| < \varepsilon$ が成り立つ. (δ は $\varepsilon/2$ や $\varepsilon/3$ など ε より小さな正の数であればで何でも良い.　□

例 4.2.5 函数 $f(x) = x^2$ については, 任意の点 $a \in \mathbb{R}$ について

$$\lim_{x \to a} f(x) = a^2$$

が成り立つ.

証明.　まず $|f(x)-a^2| = |x^2-a^2| = |x-a||x+a|$ である. $|x-a|<1$ ならば, 三角不等式より $|x| \leq |x-a|+|a| < 2|a|+1$ が成り立つので, このとき

$$|f(x)-a^2| = |x-a||x+a| \leq (2|a|+1)|x-a| \tag{4.2.2}$$

である. よって任意に与えられた $\varepsilon > 0$ について

$$\delta = \delta(\varepsilon) = \min\{1, \varepsilon/(2|a|+1)\}$$

とおくと, $0 < |x-a| < \delta$ について (4.2.2) と $|x-a| < \varepsilon/(2|a|+1)$ が同時に成り立つので

$$|f(x)-a| \leq (2a+1)|x-a| < (2a+1)\frac{\varepsilon}{2|a|+1}\varepsilon = \varepsilon$$

が成り立つ.　□

例 4.2.6 函数

$$f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$$

について

$$\lim_{x\to 2} f(x) = 4$$

が成り立つ. つまり, この函数の定義域は $\mathbb{R} - \{2\}$ であり, $x=2$ では定義されていないが, $x \to 2$ のときの極限は存在して, 4 である.

証明.　任意に与えられた $\varepsilon > 0$ について $\delta = \delta(\varepsilon) = \varepsilon/(2|a|+1)$ とおくと, $0 < |x-2| < \delta = \varepsilon$ について

$$|f(x)-4| = \left|\frac{(x-2)(x+2)}{x-2} - 4\right| = |x-2| < \varepsilon$$

が成り立つ.　□

定理 4.2.7 (極限値の一意性) 函数 $f(x)$ の極限値が a で存在するならばそれはただ 1 つである.

証明.　$x \to a$ のとき, $f(x) \to A_1$ かつ $f(x) \to A_2$ であるとする. このとき $A_1 \neq A_2$ と仮定して矛盾を導こう. $0 < \varepsilon < |A_1 - A_2|/2$ となる ε を取る. この ε について $\delta_1 > 0$ で $0 < |x-a| < \delta_1$ ならば $|f(x)-A_1| < \varepsilon$ が成り立つものが存在する. また $\delta_2 > 0$ で $0 < |x-a| < \delta_1$ ならば $|f(x)-A_2| < \varepsilon$ が成り立つものも存在する. よって $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}(>0)$ とおけば, $0 < |x-a| < \delta$ について

$$0 < |A_1 - A_2| \leq |A_1 - f(x)| + |f(x) - A_2| < 2\varepsilon < |A_1 - A_2|$$

となり矛盾を生じる. よって $A_1 = A_2$ である.　□

次に数列の極限と函数の極限の関係を述べよう.

定理 4.2.8 (数列の極限と函数の極限の関係)
$x \to a$ のとき $f(x) \to A$ となるための必要十分条件は $x_n \to a$ $(n \to \infty)$ で全ての n について $x_n \neq a$ をみたす任意の数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ について, 数列 $\{f(x_n)\}$ が $f(x_n) \to A$ をみたすこと.

証明の前に, 若干の注意を述べよう. この節のはじめに函数 f の定義域 D は a のある削除 h-近傍 $U_h^*(a)$ を含むと仮定した. 数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ が全ての n について $x_n \neq a$ であり, $x_n \to a$ をみたせば十分大きな全ての n について $x_n \in U_h^*(a)$ となる. つまり $h > 0$ について $N \in \mathbb{N}$ を $n \geq N$ ならば $|x_n - a| < h$ が成り立つように取れば, $x_n \neq a$ と合わせて $n \geq N$ について $x_n \in U_h^*(a)$ が成り立つ. 従って, 数列 $\{f(x_n)\}$ は少なくとも $n \geq N$ について定義される. そこで $b \in U_h^*(a)$ を適当に取り, $x_n \notin U_h^*(a)$ となる n については $x_n = b$ と定義し直しておけば, 全ての n について $x_n \in U_h^*(a)$ が成り立ち, 数列 $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ が定義される. そこでこれから行う上の定理の証明では, すべての n について $x_n \in U_h^*(a)$ と仮定して証明を行う. 数列は有限の項を取り去っても収束, 発散は変化しないことに注意すれば, このような変形をしても差し支えないことが了解できるであろう.

証明. $\Longrightarrow$ を示す. $x_n \to a$ $x_n \neq a$ である任意の数列 $\{x_n\}$ を取る. このとき任意に与えられた $\varepsilon > 0$ について $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ を $0 < |x - a| < \delta$ ならば $|f(x) - A| < \varepsilon$ が成り立つように取る. 必要ならば δ をより小さく取り直すことにより, $0 < \delta < h$ が成り立つとして良い. この δ について $N \in \mathbb{N}$ を $n \geq N$ ならば

$$|x_n - a| < \delta$$

が成り立つようにとれば, $x_n \neq a$ より $0 < |x_n - a| < \delta$ が $n \geq n_0$ について成り立つ. 従って $n \geq N$ について

$$|f(x_n) - A| < \varepsilon$$

が成り立つ. つまり $f(x_n) \to A$ である.

$\Longleftarrow$ を 背理法を用いて示そう. 結論を論理記号で表わすと,

$$\forall \varepsilon >: \exists \delta > 0 : \forall x \in D \cap U_\delta^*(a) : |f(x) - A| < \varepsilon$$

これを否定すると

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall \delta : \exists x \in \cap U_\delta^*(a) : |f(x) - A| \geq \varepsilon$$

となる. つまり $\varepsilon > 0$ を適当に取ると任意の $\delta > 0$ について $0 < |x - a| < \delta$ かつ $x \in D$ をみたす x で $|f(x) - A| \geq \varepsilon$ をみたすものが存在する. 従って $\delta = 1$ について, $0 < |x_1 - a| < 1$ かつ $x \in D$ をみたす点 x_1 で $|f(x_1) - A| \geq \varepsilon$ をみたすものが取れる. 次に $\delta = 1/2$ について, $0 < |x_2 - a| < 1/2$ かつ $x_2 \in D$

をみたす x_2 で $|f(x_2)-A| \geq \varepsilon$ をみたすものが取れる．以下同様に $\delta = 1/n$ について, $0 < |x_n - a| < 1/n$ かつ $x_n \in D$ をみたす x_n で $|f(x_n)-A| \geq \varepsilon$ をみたすものが取れる．このような操作を次々に行っていくと数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ が取れる．この数列 $\{x_n\}$ について, 作り方から $x_n \to a$ かつ $x_n \neq a$ が成り立つ．さらに $|f(x_n)-a| \geq \varepsilon$ が全ての n について成り立つので, $f(x_n) \to A$ が成り立たない．　□

定理 5.1.6 を極限値 A が表にでない形に直しておこう．

系 4.2.9 (数列の極限と函数の極限の関係')
$x \to a$ のとき $f(x)$ が収束するための必要十分条件は $x_n \to a$ $(n \to \infty)$ で全ての n について $x_n \neq a$ をみたす任意の数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ について, 数列 $\{f(x_n)\}$ が収束することである．

証明．$\Longrightarrow$ の証明は, 定理 5.1.6 の証明と全く同じである．

$\Longleftarrow$ を示そう．定理の条件を仮定する．このとき数列 $\{a+1/n\}_{n=1}^{\infty}$ は a に収束し, 各項が a と一致しない数列であるから．$\{f(a+1/n)\}_{n=1}^{\infty}$ 仮定より収束する．この極限を A とおく．また a に収束する任意の数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ で $x_n \neq a$ をみたすものについても $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ は基本列で収束する．この基本列の極限も A であることが次のようにしてわかる．実際, $a+1/n$ と x_n が交互に並ぶ数列

$$a+1, x_1, a+1/2, x_2, \ldots$$

を考えれば, これも a に収束し, 各項が a と一致しない数列である．よって

$$f(a+1), f(x_1), f(a+1/2), f(x_2), \ldots$$

は収束するが, これの極限値を B とおく．この数列と部分列 $\{f(a+1/n)\}_{n=1}^{\infty}$ の極限値は等しいから $B = A$ である．従ってもう 1 つの部分列 $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ の極限値も A である．以上より a に収束する任意の数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ で $x_n \neq a$ をみたすものは共通の極限値 A をもつことが従う．これより定理 5.1.6 を用いて $x \to a$ のとき $f(x) \to A$ である, つまり $f(x)$ が $x \to a$ のとき収束することが従う．　□

問題 4.2.10 定理 5.1.6 は $A = \infty, -\infty$ でも成り立つことを証明せよ．

例 4.2.11

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos x}$$

は存在しない．

証明．$x_n = 1/(n\pi)$ とおくと $\cos x_n = \cos n\pi = (-1)^n$ であり, $\{\cos x_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束しない．$\lim_{x \to 0} 1/\cos x$ が存在すれば定理 5.1.6 より $\{\cos x_n\}_{n=1}^{\infty}$ が

収束するはずであるから矛盾である．従って $\lim_{x\to 0} 1/\cos x$ は存在しない．
□

さて数列の極限については，定理 3.2.3 が成り立つ．この定理と定理 5.1.6 を合わせると，函数の極限について定理 3.2.3 のアナロジーが成り立つことが証明できる．例えば，定理 3.2.3 の (1) に対応して

(1') $x \to a$ のとき $f(x) \to A$, $g(x) \to B$ とする．また $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ とすると

$$\lim_{x\to a}\{\alpha f(x) + \beta g(x)\} = \alpha A + \beta b = \alpha \lim_{x\to a} f(x) + \beta \lim_{x\to a} g(x)$$

が成り立つことは次のようにして証明できる．

証明．　定理 5.1.6 より $x_n \to a$, $x_n \neq a$ となる任意の数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ について $f(x_n) \to A$ かつ $g(x_n) \to B$ が成り立つ．よって定理 3.2.3 より

$$\alpha f(x_n) + \beta g(x_n) \to \alpha A + \beta b$$

が成り立つ．上式は $x_n \to a$, $x_n \neq a$ をみたす任意の $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ について成り立つから定理 5.1.6 より

$$\lim_{x\to a}\{\alpha f(x) + \beta g(x)\} = \alpha A + \beta B$$

が成り立つ．　□

(2) 以降についても同様に対応する結果が成り立つことが証明できるのであるが，ここでは函数の極限の定義に基づいて直接的に証明をしていこう．

4.3　極限定理

D を $\mathbb{R}$ の部分集合とし，D 上の函数 $f : D \to \mathbb{R}$ が与えられているとする．このとき f が D の部分集合 B で上に有界 (bounded above) であるとは，任意の $x \in B$ について $f(x) \leq M$ となる実数 M が存在するときをいう．同様に，任意の $x \in B$ について $m \leq f(x)$ となる m が存在するとき，B で下に有界 (bounded below) であるという．上にも下にも有界であるとき単に有界 (bounded) という．B で有界であることは，任意の $x \in B$ について $|f(x)| \leq L$ をみたすような L が存在することと同値である．

ここでも，扱う全ての函数の定義域は，ある $h > 0$ について a の削除 h-近傍 $U_h^*(a) = \{x \in \mathbb{R} : 0 < |x - a| < h\}$ を含むという仮定をおくことにする．

定理 4.3.1 函数 $f(x)$ が $x \to a$ のとき収束すれば，ある $\delta > 0$ で $f(x)$ が $U_\delta^*(a) = \{x \in \mathbb{R} : 0 < |x - a| < \delta\}$ で有界になるものが存在する．

証明.　$A = \lim_{x|rightarrowa} f(x)$ とおく. $\varepsilon = 1$ について $\delta > 0$ を $0 < |x - a| < \delta$ ならば $|f(x) - A| < 1$ となるように取れる. 従って任意の $x \in U^*_\delta(a)$ について

$$|f(x)| \leq |f(x) - A| + |A| \leq |A| + 1$$

が成り立つので有界である.　□

定理 4.3.2　(1) $x \to a$ のとき $f(x) \to A$, $g(x) \to B$ とする. また $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ とすると

$$\lim_{x\to a}\{\alpha f(x) + \beta g(x)\} = \alpha A + \beta b = \alpha \lim_{x\to a} f(x) + \beta \lim_{x\to a} g(x)$$

(2) $x \to a$ のとき $f(x) \to A$, $g(x) \to B$ とする.

$$\lim_{x\to a} f(x)g(x) = AB = \lim_{x\to a} f(x) \lim_{x\to a} g(x),$$

(3) $x \to a$ のとき $f(x) \to A$ かつ $A \neq 0$ ならば

$$\lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{A} = \frac{1}{\lim_{x\to a} f(x)}.$$

証明. (1) $|\alpha| + |\beta| = 0$ のときは $\alpha = \beta = 0$ ゆえ $\alpha f(x) + \beta g(x) \equiv 0$ となるので明らかに成り立つ. よって $|\alpha| + |\beta| = 0$ と仮定して良い. このとき $\varepsilon > 0$ が任意に与えられたとしよう. $\delta_1 > 0$ を $0 < |x - a| < \delta_1$ ならば

$$|f(x) - A| < \varepsilon/(|\alpha + | + |\beta|) \tag{4.3.3}$$

が成り立つように取り, $\delta_2 > 0$ を $0 < |x - a| < \delta_2$ ならば

$$|g(x) - B| < \varepsilon/(|\alpha + | + |\beta|) \tag{4.3.4}$$

が成り立つように取る. そこで $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ とおけば, $0 < |x - a| < \delta$ について (4.3.3) と (4.3.4) が同時に成り立つので

$$\begin{aligned} & |\alpha f(x) + \beta g(x) - (\alpha A + \beta B)| \\ \leq\ & |\alpha||f(x) - A| + |\beta||g(x) - B| \\ <\ & |\alpha|\frac{\varepsilon}{|\alpha| + |\beta|} + |\beta|\frac{\varepsilon}{|\alpha| + |\beta|} \end{aligned}$$

$$= \varepsilon$$

が成り立つ.

(2) 任意に与えられた $\varepsilon > 0$ について δ_1, δ_2, $\delta_3 > 0$ を

$$0 < |x - a| < \delta_1 \Longrightarrow |f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2(|B| + 1)}$$
$$0 < |x - a| < \delta_2 \Longrightarrow |g(x) - B| < \frac{\varepsilon}{2(|A| + 1)}$$
$$0 < |x - a| < \delta_3 \Longrightarrow |f(x) - A| < 1$$

となるように取る．このとき $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$ とおけば, $0 < |x-a| < \delta$ をみたす x について上の 3 つの不等式が同時に成り立つから,

$$
\begin{aligned}
& |f(x)g(x) - AB| \\
= \quad & |f(x)g(x) - f(x)B + f(x)B - AB| \\
\leq \quad & |f(x)||g(x) - B| + |B||f(x) - A| \\
< \quad & (|f(x) - A| + |A|)\frac{\varepsilon}{2(|A|+1)} + |B|\frac{\varepsilon}{2(|B|+1)} \\
< \quad & \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
\end{aligned}
$$

(3) $A \neq 0$ より $\delta_1 > 0$ を $0 < |x-a| < \delta_1$ ならば $|f(x) - A| < |A|/2$ となるように取れる．よって $0 < |x-a| < \delta_1$ について $|f(x)| \geq |f(x) - A| - A > |A|/2 > 0$ となる．つまり a の削除近傍 $U^*_{\delta_1}(a)$ において $f(x) \neq 0$ となり, $1/f(x)$ が定義される．そこで以下 $1/f(x)$ は $U^*_{\delta_1}(a)$ で定義されていると考えることにする．

任意に与えられた $\varepsilon > 0$ について $\delta_2 > 0$ を $0 < |x-a| < \delta_2$ ならば $|f(x) - A| < |A|^2\varepsilon/2$ が成り立つように取る．このとき $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ とおくと $0 < |x-a| < \delta$ について

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{A}\right| \quad &= \quad \frac{|f(x) - A|}{|A||f(x)|} \\
&\leq \quad \frac{|A|^2\varepsilon/2}{|A||A|/2} = \varepsilon
\end{aligned}
$$

が成り立つ． □

定理 4.3.2 から帰納法を用いて $\lim_{x\to a} f_1(x)$, …, $\lim_{x\to a} f_n(x)$ が存在すれば

(a)

$$\lim_{x\to a}\{f_1(x) + \cdots + f_n(x)\} = \lim_{x\to a} f_1(x) + \cdots + \lim_{x\to a} f_n(x)$$

(b)

$$\lim_{x\to a}\{f_1(x)\cdots f_n(x)\} = \lim_{x\to a} f_1(x)\cdots \lim_{x\to a} f_n(x)$$

を証明できる．これは読者の演習問題としよう．

例 4.3.3 定理 *4.3.2* や上の (a), (b) の使い方の例を示しておこう．

1.

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to a}(x^3 - 2x + 1) \quad &= \quad \lim_{x\to a} x^3 - 2\lim_{x\to a} x + \lim_{x\to a} 1 \\
&= \quad \{\lim_{x\to a} x\}^3 - 2\lim_{x\to a} x + \lim_{x\to a} 1 = a^3 - 2a + 1
\end{aligned}
$$

2.

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to 1}\frac{x^2-x-6}{x+3}\\
=&\quad\frac{\lim_{x\to1}x^2-\lim_{x\to1}x-\lim_{x\to1}6}{\lim_{x\to1}x+\lim_{x\to1}3}\\
=&\quad\frac{1-1-6}{1+4}=-\frac{6}{5}
\end{aligned}
$$

定理 4.3.4 $f(x)$ が a の 削除近傍 $U_h^*(a)$ で定義され, $x\to a$ のとき $f(x)\to A$ とする．このとき全ての $x\in U_h^*(a)$ について $f(x)\le M$ ならば $A\le M$．また全ての $x\in U_h^*(a)$ について $f(x)\ge m$ ならば $A\ge m$.

証明.　後半も同様であるから, 前半のみ証明する．まず $A>M$ とすると $\varepsilon=A-M>0$ とおき, $\delta>0$ を $0<|x-a|<\delta$ ならば $|f(x)-A|<\varepsilon$ となるように取る．このとき $0<|x-a|<\delta$ をみたす x について

$$M\ge f(x)=A+f(x)-A>A-\varepsilon=A-(A-M)=M$$

となり矛盾を生じる．　□

定理 4.3.5 (はさみうちの原理) 函数 f, g, k の定義域は共通の削除近傍 $U_h^*(a)$ を含むとする．また $f(x)\le k(x)\le g(x)$ が全ての $x\in U_h^*(a)$ について成り立っているとする．このとき $x\to a$ のとき $f(x)\to A$, $g(x)\to A$ ならば. $k(x)\to A$ が成り立つ.

証明.　任意に与えられた $\varepsilon>0$ について $\delta_1,\delta_2>0$ を

$$
\begin{aligned}
0<|x-a|<\delta_1 &\Longrightarrow |f(x)-A|<\varepsilon\\
0<|x-a|<\delta_2 &\Longrightarrow |g(x)-A|<\varepsilon
\end{aligned}
$$

が成り立つように取る．$\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$ とおけば, $0<|x-a|<\delta$ について

$$-\varepsilon<f(x)-A\le k(x)-A\le g(x)-A<\varepsilon$$

が成り立つ．よって $|k(x)-A|<\varepsilon$ が成り立つ.　□

定理 4.3.5 の応用例を述べる為に, 次の公式が必要である.

定理 4.3.6

$$\lim_{\theta\to0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1$$

証明.　x-y 平面において x 軸上に点 $A=(1,0)$ を取る. 原点 O を通り, x 軸と反時計まわりに角 θ をなす直線と y 軸との交点を T とおく．また線分 OT 上に $OA=OB$ となる点 B を取る．このとき三角形 OAB, 扇形 OAB, 三角形 OAT の面積を比較して

$$\frac{1}{2}\sin\theta<\frac{1}{2}\theta<\frac{1}{2}\tan\theta$$

を得る．この不等式より

$$\cos\theta < \frac{\sin\theta}{\theta} < 1$$

となる．$cos\theta$, $\sin\theta/\theta$ は θ の偶函数であるから，この不等式は $0 < |\theta| < \pi/2$ で成り立つ．まず $0 < \theta| < \pi/2$ において $0 < \sin\theta/\theta < 1$ より $|\sin\theta| < |\theta$ となるので，はさみうちの原理より，$\sin\theta \to 0/; (\theta \to 0)$ がわかる．また $0 \leq 1 - \cos\theta = 2\sin^2(\theta/2)$ より $\cos\theta \to 1$ $(\theta \to 0)$ であることもわかる．さらに $\cos\theta < \theta^{-1} sin\theta < 1$ において $\cos\theta \to 1$ $(\theta \to 0)$ よりはさみうちの原理を用いて $\sin\theta/\theta \to 1$ を得る．

問題 4.3.7 次の極限を求めよ．

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\sin bx}{\sin ax}\ (a \neq 0) \quad \lim_{x\to\pi/6} \frac{\sin(2x-\pi/3}{x-\pi/6}$$

定理 4.3.8 (函数の極限についての Cauchy の判定条件)
$\lim_{x\to a} f(x)$ が存在するための必要十分条件は任意の $\varepsilon > 0$ について $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ を $0 < |x-a| < \delta$ かつ $0 < |x'-a| < \delta$ ならば $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$ となるように取ることができることである．

証明． $\Longrightarrow$ を示す．$\lim_{x\to a} f(x) = A$ とおく．このとき $\varepsilon > 0$ について $\delta > 0$ を $0 < |x-a| < \delta$ ならば $|f(x) - A| < \varepsilon/2$ が成り立つようにとることができる．このとき $0 < |x-a| < \delta$ かつ $0 < |x'-a| < \delta$ ならば

$$|f(x) - f(x')| \leq |f(x) - A| + |A - f(x')| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

が成り立つ．

$\Longleftarrow$ を示す．定理の条件が成り立つとする．この時 a に収束する任意の数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ で $x_n \neq a$ をみたすものについて数列 $\{f(x_n)_{n=1}^{\infty}\}$ が基本列であることを示そう．これを示せば，$\{f(x_n\}_{n=1}^{\infty}$ が収束するので系 4.2.9 より $f(x)$ が $x \to a$ のとき収束することがわかり，定理の証明が終る．

まず任意の $\varepsilon > 0$ について $\delta > 0$ を $0 < |x-a| < \delta$ かつ $0 < |x'-a| < \delta$ ならば $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$ が成り立つように取れる．この $\delta > 0$ について $N \in \mathbb{N}$ を $n \geq N$ ならば $|x_n - a| < \delta$ が成り立つように取る．このとき n, $m \geq N$ ならば $0 < |x_m - a| < \delta$, $0 < |x_n - a| < \delta$ となり $|f(x_m) - f(x_n)| < \varepsilon$ が成り立つ．よって $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ は基本列である．　□

4.4　片側極限 (one-sided limit)

x を a に近づけるとき，近づき方に制限を加えて考えることがある．例えば $x < a$ や $x > a$ という制限のもとで $x \to a$ とするときの，$f(x)$ の極限を考えることなどがそれにあたる．厳密な定義を述べると次のようになる．

定義 4.4.1 $f(x)$ の定義域はある $h>0$ について開区間 $(a-h,a)$ を含むとする．つまり f は a の左側で定義され, a 自身では定義されていてもいなくても良いとする．このとき任意の $\varepsilon>0$ について $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ を $a-\delta<x<a$ ならば $|f(x)-A|<\varepsilon$ が成り立つように取れるとき, $x\to a-0$ または $(x\uparrow a)$ のとき $f(x)\to A$ と表わす．また A を a における f の左極限 (right-hand limit) といい $\lim_{x\to a-0}f(x)=\lim_{x\uparrow a}f(x)=f(a-0)$ で表わす．同様に $f(x)$ の定義域はある $h>0$ について開区間 $(a,a+h)$ を含むとする．このとき任意の $\varepsilon>0$ について $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ を $a<x<a+\delta$ ならば $|f(x)-A|<\varepsilon$ が成り立つように取れるとき, $x\to a+0$ または $(x\downarrow a)$ のとき $f(x)\to A$ と表わす．また A を a における f の右極限 (left-hand limit) といい $\lim_{x\to a+0}f(x)$ $=\lim_{x\downarrow a}f(x)=f(a+0)$ で表わす．

右極限と左極限を総称して片側極限という．

函数 f が条件

$$x_1\le x_2 \text{ ならば } f(x_1)\le f(x_2)$$

をみたす時, (単調) 増加 (increasing) であるという．特に

$$x_1<x_2 \text{ ならば } f(x_1)<f(x_2)$$

狭義 (単調) 増加 (strictly increasing) であるという．同様に

$$x_1\le x_2 \text{ ならば } f(x_1)\ge f(x_2)$$

をみたす時, (単調) 減少 (decreasing) といい,

$$x_1<x_2 \text{ ならば } f(x_1)>f(x_2)$$

をみたす時, 狭義 (単調) 減少 (strictly decreasing) という．また増加または減少の場合, 単調 (monotone) であるといい, 狭義増加または狭義減少の場合, 狭義単調であるという．

定理 4.4.2 $f(x)$ が, 開区間 $I=(a,b)$ で単調で有界ならば $\lim_{x\downarrow a}f(x)$ と $\lim_{x\uparrow a}f(x)$ が存在する．

証明． f が増加のとき $\lim_{x\downarrow a}f(x)=\sup\{f(x):a<x,b\}$ となることを証明する．

f は (a,b) で有界であるから, $\inf\{f(x):a<x<b\}$ が存在するので, これを A とおく．sup の必要十分条件である定理 2.3.11 より, 任意に与えられた $\varepsilon>0$ をみたす x について $A-\varepsilon<f(x_1)$ となる $x_1\in(a,b)$ が存在する．よって $\delta=x_1-a>0$ とおくと $a<x<a+\delta=x_1$ について f の増加性より $f(x)\ge f(x_1)>A-\varepsilon$ が成り立つ．また A は f の取りうる値の上限であ

るから, $f(x) \leq A$ が成り立つ. よって $a < x < a + \delta = x_1$ をみたす x にについて $A - \varepsilon < f(x) \leq A < A + \varepsilon$ より $|f(x) - A| < \varepsilon$ が成り立つ. これは $x \downarrow a$ のとき $f(x) \to A$ を示す.

$\lim_{x \uparrow a} f(x) = \sup\{f(x) : a < x, b\}$ となることも同様に証明できる. また f が減少の場合についても証明は同様であるから, これらについては読者の演習問題とする. □

定理 4.4.3 $\lim_{x \to a} f(x)$ が存在するための必要十分条件は, $\lim_{x \to a-0} f(x)$ と $\lim_{x \to a+0} f(x)$ がともに存在して一致すること.

証明. $\lim_{x \to x_0} f(x)$ が存在したとして, A とおく. 任意の $\varepsilon > 0$ について $\delta > 0$ を $0 < |x - a| < \delta$ ならば $|f(x) - A| < \varepsilon$ が成り立つように取れる. このとき $a - \delta < x < a$ をみたす x は $0 < |x - a| < \delta$ をみたすので, やはり $|f(x) - A| < \varepsilon$ が成り立つ. よって $\lim_{x \to a-0} f(x) = A$ である. 同様に $a < x < a + \delta$ をみたす x は $0 < |x - a| < \delta$ をみたすので, $|f(x) - A| < \varepsilon$ が成り立つ. よって $\lim_{x \to a+0} f(x) = A$ である.

逆に, $\lim_{x \to a-0} f(x)$ と $\lim_{x \to a+0} f(x)$ がともに存在して一致すると仮定して, この共通の極限値を A とおくと, 任意の $\varepsilon > 0$ について δ_1, $\delta_2 > 0$ を

$$a - \delta_1 < x < a \text{ ならば } |f(x) - A| < \varepsilon$$
$$a < x < a + \delta_2 \text{ ならば } |f(x) - A| < \varepsilon$$

が成り立つように取れる. このとき $\delta = \min\{\delta - 1, \delta_2\}$ とおけば $0 < |x - a| < \delta$ をみたす x については $a - \delta_1 \leq a - \delta < x < a$ または $a < x < a + \delta \leq a + \delta_2$ のどちらかが成り立つので $|f(x) - A| < \varepsilon$ が成り立つ. よって $\lim_{x \to a} f(x)$ は存在して A と一致する. □

片側極限についても, 定理 4.2.7, 5.1.6, 4.3.14.3.24.3.44.3.54.3.8 に対応する結果が成り立つ. これらの定理の内容を適当に修整して片側極限に関する内容に変更し証明することを読者の演習問題としよう.

定義 4.4.4 $\lim_{x \to a+0} f(x) = \infty$ または $= -\infty$ であるとは, 任意の $K \in \mathbb{R}$ について $\delta = \delta(K)$ を $a < x < a + \delta$ ならばそれぞれ $f(x) > K$ が成り立つ, または $f(x) < k$ が成り立つように取れるときをいう. また $\lim_{x \to a-0} f(x) = \infty$ または $= -\infty$ であるとは, 任意の $K \in \mathbb{R}$ について $\delta = \delta(K)$ を $a - \delta < x < a$ ならばそれぞれ $f(x) > K$ が成り立つ, または $f(x) < k$ が成り立つように取れるときをいう.

問題 4.4.5

$$\lim_{x \to -1+0} \frac{x^3}{x+1}, \quad \lim_{x \to -1-0} \frac{x^3}{x+1}$$

を求めよ.

次に $x \to \pm\infty$ のときの極限を定義しよう.

定義 4.4.6 $x \to \infty$ または $x \to -\infty$ のとき $f(x) \to A$ であるとは, 任意の $\varepsilon > 0$ について $d = d(\varepsilon) \in \mathbb{R}$ をそれぞれ $x > d$ または $x < d$ ならば $|f(x) - A| < \varepsilon$ が成り立つように取れるときをいう.

$x \to \infty$ のとき $f(x) \to \infty$ であることの定義も, 任意の $K \in \mathbb{R}$ について $d \in \mathbb{R}$ を $x > d$ ならば $f(x) > K$ が成り立つように取れるときをいう. この他に $\lim_{x\to\infty} f(x) = -infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -infty$ の定義もこれを参考にすれば容易に推測できるであろう. これらの定義を書き下すことを読者の演習問題とする.

例 4.4.7 $f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$ のとき, $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$. また n が偶数ならば, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$ n が奇数ならば, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ である.

証明.

$$\frac{f(x)}{x^n} = 1 + \frac{a_1}{x} + \cdots + \frac{a_n}{x^n}$$

より $\lim_{x\to-\infty} f(x)/x^n = 1$. また

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \begin{cases} -\infty & \text{if } n \text{ is odd(奇数)}, \\ \infty & \text{if } n \text{ is even(偶数)} \end{cases}$$

よって

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x^n} \lim_{x\to-\infty} x^n = \begin{cases} -\infty & \text{if } n \text{ is odd(奇数)}, \\ \infty & \text{if } n \text{ is even(偶数)} \end{cases}$$

問題 4.4.8 つぎの極限値を求めよ.

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{x}(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}), \quad \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{[x]}}$$

ただし $[x]$ は *Gauss* 記号である.

4.5　ランダウの記号

函数 f の定義域はともに点 a のある削除近傍 $U_h(a)$ を含むとする. $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ のとき f は a において無限小であるという.

a で無限小である 2 つの函数 f, g が与えられたとしよう. このとき f と g の収束の速さの比較が問題になるときがある. このようなとき, 以下の概念が有用である.

定義 4.5.1 2 つの函数 f, g の定義域はともに点 a のある削除近傍 $U_h^*(a)$ を含み全ての $x \in U_h^*(a)$ について $g(x) \neq 0$ であるとする．このとき

$$\lim x \to a \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

が成り立つならば, f は g よりも高位の無限小であるといい,

$$f(x) = \mathrm{o}(g(x)) \quad (x \to a)$$

で表わす．またある a の 削除近傍を f/g がそこで有界になるように取れる時, 正確に述べれば $\delta > 0$ と $M \geq 0$ を $|f(x)/g(x)| \leq M$ がすべての $x \in U_\delta^*(a)$ について成り立つように取れる時, f は g で押さえられるといい,

$$f(x) = \mathrm{O}(g(x)) \quad (x \to a)$$

で表わす．この o と O をランダウ (Landau) の記号という．

ランダウの記号は f, g が無限小の場合に良く用いられるが, 定義自体は無限小でなくとも可能である．g が無限小で $f(x) = \mathrm{o}(g(x))$ $(x \to a)$ のとき, f は a で g より高位の無限小であるという．

例 4.5.2

$$x^2 = \mathrm{o}(x) \quad (x \to 0)$$
$$\sin x \mathrm{O}(x) \quad (x \to 0)$$

例 4.5.3

$$f(x) = \mathrm{o}(1) \quad (x \to a)$$
$$f(x)\mathrm{O}(x) \quad (x \to a)$$

とは, それぞれ $f(x) \to 0$ $(x \to a)$ と $f(x)$ が, ある a の削除近傍で有界であることを意味する．

片側極限や, $x \to \pm\infty$ のときにもランダウの記号を定義することができる．つまり, $x \to a+0$, $x \to a+0$, $x \to \infty$, $x \to -\infty$ のときに $f(x) = \mathrm{o}(g(x))$ であるとは, それぞれの場合に $f(x)/(g) \to 0$ となるときと定義する．“O” には, $\delta > 0$ と M を $|f(x)/g(x)| \leq M$ がそれぞれの場合に対応して $a < x < a+\delta$, $a-\delta < x < a$, $x > \delta$, $x < -\delta$ のときに成り立つように取れるときと定義する．

例 4.5.4 $a < b$ ならば

$$x^a = \mathrm{o}(x^b) \quad (x \to +0)$$

$a > 0$ と $n \in \mathbb{N}$ について

$$x^n = \mathrm{o}(a^x) \quad (x \to \infty)$$

定理 4.5.5 　(1) $f(x) = \mathrm{o}(g(x))$ $(x \to a)$ ならば $f(x) = \mathrm{O}(g(x))$ $(x \to a)$

(2) “$f(x) = \mathrm{O}(g(x))$ $(x \to a)$ かつ $g(x) = \mathrm{O}(h(x))$ $(x \to a)$” ならば $f(x) = \mathrm{O}(h(x))$ $(x \to a)$

(3) “$f(x) = \mathrm{O}(g(x))$ $(x \to a)$ かつ $g(x) = \mathrm{o}(h(x))$ $(x \to a)$” または “$f(x) = \mathrm{o}(g(x))$ $(x \to a)$ かつ $g(x) = \mathrm{O}(h(x))$ $(x \to a)$” ならば $f(x) = \mathrm{o}(h(x))$ $(x \to a)$

証明. (1) $f(x) = \mathrm{o}(g(x))$ $(x \to a)$ ならば, $\lim_{x\to a} f(x)/g(x) = 0$ である. このとき $U_\delta(a)$, M が取れることは, 定理 4.3.1 より従う.

(2) “$f(x) = \mathrm{O}(g(x))$ $(x \to a)$ かつ $g(x) = \mathrm{O}(h(x))$ $(x \to a)$” より $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$, $M_1 \geq 0$, $M_2 \geq 0$ を $|f(x)| \leq M_1|g(x)|$ が $U^*_{\delta_1}(a)$ で, $|g(x)| \leq M_2|h(x)|$ が $U^*_{\delta_2}(a)$ で成り立つように取れる. よって $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}(> 0)$ とおけば $U^*_\delta(a)$ で 2 つの不等式がともに成り立つので, ここで $|f(x)| \leq M_1|g(x)| \leq M_1M_2|h(x)|$ が成り立つ. よって, $f(x) = \mathrm{O}(h(x))$ $(x \to a)$ が成り立つ.

(3) “$f(x) = \mathrm{O}(g(x))$ $(x \to a)$ かつ $g(x) = \mathrm{o}(h(x))$ $(x \to a)$” ならば $\delta > 0$, $M \geq 0$ を $|f(x)| \leq M|g(x)|$ が $U^*_\delta(a)$ で, が成り立つように取れる. このとき $U^*_\delta(a)$ で,

$$0 \leq \frac{|f(x)|}{|h(x)|} = \frac{|f(x)|}{|g(x)|}\frac{|g(x)|}{|h(x)|} \leq M\frac{|g(x)|}{|h(x)|}$$

が成り立ち, $|g(x)|/|h(x)| \to 0$ $(x \to a))$ であるから $|f(x)|/|g(x)| \to 0$ $(x \to a))$ が成り立つ.

“$f(x) = \mathrm{o}(g(x))$ $(x \to a)$ かつ $g(x) = \mathrm{O}(h(x))$ $(x \to a)$” の場合も同様であるから, 証明は読者の演習問題とする. □

例 4.5.6

第5章　連続函数

5.1　連続函数の定義と基本的性質

定義 5.1.1 函数 $f : D \to \mathbb{R}$ が与えられているとする．また $a \in D$ とする．このとき f が点 a で連続であるとは, 任意の $\varepsilon > 0$ について $\delta > 0$ を $x \in A$ かつ $|x - a| < \delta$ ならば

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

が成り立つように取れるときをいう．f が a で連続でないときは不連続であるといい, 点 a を f の不連続点という．また f が定義域 D 内の全ての点で連続なとき f は D で連続であるという．

f が定義域 D で連続の場合, δ は $\varepsilon > 0$ と a にも依存するので $\delta = \delta(\varepsilon) = \delta(a, \varepsilon)$ と表わして, 依存の関係を表現することがある．

I を区間とし, f は I で定義された函数とする．但し区間は (α, β), $[\alpha, \beta]$, $(\alpha, \beta]$, $[\alpha, \beta)$ のどの形でも良いとするが, 空ではなく (つまり $\alpha < \beta$), α, $\beta \in \mathbb{R}$(つまり無限区間でない) とする．$a \in I$ について,

(i) a は I の端点でない．

(ii) a は I の端点である．

という 2 種類の場合がある．それぞれの場合について f が点 a で連続であるとは, どういうことかを考えて見よう．まず a が端点でないときは, $h > 0$ を a の h-近傍 $U_h(a) = \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < h\}$ が $U_h(h) \subset I$ となるように取ることができる．従って 特に削除近傍 $U_h^*(a) = \{x \in \mathbb{R} : 0 < |x - a| < h\}$ も $U_h^*(h) \subset I$ をみたす．このときは, a における f の極限を考えることができる．さて a で f が連続ならば, $\varepsilon > 0$ について $\delta > 0$ を $x \in I$ かつ $|x - a| < \delta$ ならば $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ が成り立つように取ることができる．特に “$x \in I$ かつ $0 < |x - a| < \delta$” ならば “$x \in I$ かつ $|x - a| < \delta$” であるから $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ が成り立つ．よって $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ である．逆に $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ ならば, $\varepsilon > 0$ について $\delta > 0$ を “$x \in I$ かつ $0 < |x - a| < \delta$” ならば $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ が成り立つように取ることができる．このとき “$x \in I$ かつ $|x - a| < \delta$” と仮定すると, $x = a$ のときは $|f(x) - f(a)| = 0|fa) - f(a)| = 0 < \varepsilon$ であるから $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ が無条

件に成り立つ．また $0 < |x - a| < \delta$ のときも $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ が成り立つ．よって $x \in I$ かつ $|x - a| < \delta$ ならば $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ が成り立つので f は a で連続である．以上より次の定理が得られる．

定理 5.1.2 函数 f が区間 I で定義され $a \in I$ は区間の端点でないとする．このとき f が a で連続であるための必要十分条件は

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

である．

次に, $a \in I$ が区間の端点の場合を考えよう．a が左端点ならば, いかなる $h > 0$ についても $U_h(a) \subset I$ となることはないので, 通常の極限を考えることはできないが, $\{xa \leq x < a + h\} \subset I$ をみたす $h > 0$ が存在するので右極限を考えることができる．

f が a で連続ならば, 任意の $\varepsilon > 0$ について $\delta > 0$ を $x \in I$ かつ $|x - a| < \delta$ ならば $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ が成り立つように取ることができる．ところが a は I の左端点であるから, $x \in I$ かつ $|x - a| < \delta$ とは $x \in I$ かつ $a \leq < x < a + \delta$ を意味する．従って特に $x \in I$ かつ $a < x < a + \delta$ ならば $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ となるので, $\lim_{x \to a+0} f(x) = f(a)$ が成り立つ．

逆に $\lim_{x \to a+0} f(x) = f(a)$ が成り立つとする．このときは 任意の $\varepsilon > 0$ について $\delta > 0$ を $x \in I$ かつ $a < x < a + \delta$ ならば, $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ が成り立つように取ることができる．ここで $x = a$ のときも $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ がみたされから, 結局 $x \in I$ かつ $a \leq x < a + \delta$ ならば, $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ が成り立つ．従って f は a で連続である．

a が I の右端点の場合でも同様な議論を行うことにより, f が a で連続であることは $\lim_{x \to a-0} f(x) = f(a)$ と同値であることがわかる．以上より次の定理が得られた．

定理 5.1.3 函数 f が区間 I で定義されているとする．$a \in I$ が I の左端点または右端点ならば, f が a で連続であるための必要十分条件は, それぞれ

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = f(a) \quad \text{または} \quad \lim_{x \to a-0} f(x) = f(a)$$

である．

定義 5.1.4 f の定義域 D が, ある $h > 0$ について集合 $\{x \in \mathbb{R} : a \leq x < a + h\}$ を含むとする．このとき

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = f(a)$$

が成り立つならば, f は a で右連続であるという. これは任意の $\varepsilon > 0$ について $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ を $x \in D$ かつ $a \leq x < a + \delta$ ならば $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ が成り立つように取れることと同値である. また f の定義域が, ある $h > 0$ について集合 $\{x \in \mathbb{R} : a - h < x \leq a\}$ を含むとする. このとき

$$\lim_{x \to a-0} f(x) = f(a)$$

が成り立つならば, f は a で右連続であるという. これは任意の $\varepsilon > 0$ について $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ を $x \in D$ かつ $a - \delta < x \leq a$ ならば $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ が成り立つように取れることと同値である.

このように右, 左連続を定義すれば f が区間 I で定義されていて, f が区間の右, または左端点で連続であるとは, f がそれぞれ左, または右連続であることに他ならない. また

定理 5.1.5 f の定義域は a のある h-近傍 $U_h(a)$ を含むとする. このとき f が a で連続であるための必要十分条件は f が a で左連続かつ右連続であることである.

証明. f が a で連続ならば, 任意の $\varepsilon > 0$ について $\delta > 0$ を $|x - a| < \delta$ ならば $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ が成り立つように取れる. このとき

$$a - \delta < x \leq a \Longrightarrow |x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

また

$$a \leq x < a + \delta \Longrightarrow |x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

であるから, f は a で左連続かつ右連続である.

f が a で左連続かつ右連続ならば, 任意の $\varepsilon > 0$ について δ_1, $\delta_2 > 0$ を $a - \delta_1 < x \leq a$ ならば $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ が成り立ち, $a \leq x < a + \delta_2$ ならば $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ が成り立つように取れる. このとき $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ とおけば

$$\begin{aligned} |x - a| < \delta \quad &\Longrightarrow \quad a - \delta_1 < x \leq a \quad \text{または} \quad a \leq x < a + \delta_2 \\ &\Longrightarrow \quad |f(x) - f(a)| < \varepsilon \end{aligned}$$

となるので, f は a で連続である. □

定理 5.1.6 (数列の極限と函数の連続性)
函数 f が区間 I で定義されていて, $a \in I$ とする. このとき次の 2 つの条件は同値である.

(1) f は a で連続である.

(2) $x_n \to a$ $(n \to \infty)$ で全ての n について $x_n \in I$ をみたす任意の数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ について, $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$ が成り立つ.

証明．(1) $\Longrightarrow$ (2) 任意の $\varepsilon > 0$ について $\delta > 0$ を $x \in I$ かつ $|x - a| < \delta$ ならば $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ が成り立つように取れる．さて数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ で全ての n について $x_n \in I$ をみたし, $x_n \to a$ をみたすもが与えられたとする．この $\delta > 0$ について $N \in \mathbb{N}$ を $n \geq N$ ならば $|x_n - a| < \delta$ が成り立つように取れる．このとき $n \geq N$ ならば $|x_n - a| < \delta$ より $|f(x_n) - f(a)| < \varepsilon$ が成り立つ．よって $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$ が成り立つ.

(2) $\Longrightarrow$ (1) 背理法をを用いて証明する．(1) を否定すると, ある $\varepsilon > 0$ で次の性質をみたすものが存在する.

> 任意の $\delta > 0$ についてある x で $x \in I$ かつ $|x - a| < \delta$ をみたし, さらに $|f(x) - f(a)| > \varepsilon$ をみたすものが存在する.

このとき各 $n \in \mathbb{N}$ について $\delta = 1/n$ とおくことにより, x_n を $x_n \in I$ かつ $|x_n - a| < 1/n$ さらに $|f(x_n) - f(a)| > \varepsilon$ が成り立つように取ることができる．この数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ については $x_n \to a$, $x_n \in I$ をみたすが $f(x_n) \to f(a)$ はみたされない.　□

例 5.1.7 $c \in \mathbb{R}$ とする．定数函数 $f(x) \equiv c$ については, 例 4.2.3 より任意の点 $a \in \mathbb{R}$ について

$$\lim_{x\to a} f(x) = c = f(a)$$

が成り立つから $\mathbb{R}$ で連続である.

例 5.1.8 恒等函数 $f(x) = x$ については, 例 4.2.4 より任意の点 $a \in \mathbb{R}$ について

$$\lim_{x\to a} f(x) = a = f(a)$$

が成り立ので $\mathbb{R}$ で連続である.

上の例と $\lim_{x\to a} f(x)^n = \{\lim_{n\to a} f(x)\}^n$ より

例 5.1.9 函数 $f(x) = x^n$ については, 任意の点 $a \in \mathbb{R}$ について

$$\lim_{x\to a} f(x) = a^n = f(a)$$

が成り立ので $\mathbb{R}$ で連続である.

例 5.1.10 函数 $f(x) = |x|$ は $\mathbb{R}$ で連続である.

証明. $a \in \mathbb{R}$ を任意の点とする. 任意に与えられた $\varepsilon > 0$ について $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ を $\delta = \varepsilon$ とおけば $|x-a| < \delta$ をみたす x について

$$|f(x) - f(a)| = ||x| - |a|| \leq |x - a| < \delta = \varepsilon$$

が成り立つので, a で連続である. a は $\mathbb{R}$ の任意の点であったから $f(x) = |x|$ は $\mathbb{R}$ で連続である. □

例 5.1.11 函数 $f(x) = \sin x$ は $\mathbb{R}$ で連続である.

証明. $a \in \mathbb{R}$ を任意の点とする. 任意の実数 t について成り立つ不等式 $|\cos t| \leq 1$ と $|\sin t| \leq |t|$ より

$$|\sin x - \sin a| = \left|2\cos\left(\frac{x+a}{2}\right)\sin\left(\frac{x-a}{2}\right)\right| \leq 2\frac{|x-a|}{2} = |x-a|$$

より任意に与えられた $\varepsilon > 0$ について $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ を $\delta = \varepsilon$ とおけば $|x-a| < \delta$ をみたす x について $|f(x)-f(a)| = |\sin x - \sin a| \leq |x-a| < \delta = \varepsilon$ が成り立つので, $f(x) = \sin x$ は a で連続である. ここで a は $\mathbb{R}$ の任意の点であったから $f(x) = \sin x$ は $\mathbb{R}$ で連続である. □

問題 5.1.12 $f(x) = \cos x$ が $\mathbb{R}$ で連続であることを証明せよ.

例 5.1.13 $f(x) = 1/x$ は集合 $A = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ で連続である.

証明. a を任意の A の点とする. このとき $a > 0$ に注意しよう. 任意に与えられた $\varepsilon > 0$ について $0 < \delta < \min\{\varepsilon|a|^2/2, a/2\}$ をみたす δ を取れば $|x-a| < \delta$ をみたす x について $|x| \geq |a| - |x-a| > a/2$ が成り立つので

$$\begin{aligned} |f(x) - f(a)| &= \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{a}\right| \\ &= \frac{|x-a|}{a|x|} \\ &< \frac{2|x-a|}{a^2} < \frac{2\varepsilon a^2/2}{a^2} = \varepsilon \end{aligned}$$

が成り立つ. よって $f(x) = 1/x$ は a で連続である. $a \in A$ は任意ゆえ, A の全ての点で f は連続であるあるから, A で連続である. □

定理 5.1.14 $f : D \to \mathbb{R}$ が点 $a \in D$ で連続ならばある $\delta > 0$ で $f(x)$ が $U_\delta(a) \cap D$ で有界となるものが存在する.

証明は 定理 4.3.1 と殆ど同じであるから, 読者の演習問題としよう.

> **定理 5.1.15** $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ とし, 函数 f, g は集合 $D \subset \mathbb{R}$ で定義されているとする. また $a \in D$ で f と g はともに a で連続であるとする. このとき次の性質が成り立つ.
>
> $\alpha f + \alpha g$, $f \cdot g$ は a で連続である.

(2) $f(a) \neq 0$ ならば $h > 0$ を $x \in D$ かつ $|x-a| < h$ ならば $f(x) \neq 0$ となるように取ることができる．またこのとき $1/f(x)$ は集合 $\{x \in D : |x-a| < h\}$ で定義され, a で連続である．

証明．(1) については, 定理 4.3.2 の (1), (2) の証明と殆ど同様な議論をを行うことにより証明できるので読者の演習問題とする．

(2) $\varepsilon = |f(a)| > 0$ について $h > 0$ を $x \in D$ かつ $|x-a| < h$ ならば $|f(x) - f(a)| < |f(a)|$ となるように取ることができる．このとき $|f(x)| \geq |f(a)| - |f(x) - f(a)| > |f(a)| - |f(a)| = 0$ であるから, $f(x) \neq 0$ である．次に f が a で連続であることの証明は, 定理 4.3.2 の (3) の証明と殆ど同様であるので読者の演習問題とする．　□

(1) と (2) を組み合わせて $f(a) \neq 0$ で f と g が a で連続ならば g/f も a で連続であることが容易にわかる．

函数 $f : D \to \mathbb{R}$ が D で連続であるとは, D の全ての点で連続であることと定義した．この定義と定理 5.1.15 を用いて "f, g が D で連続ならば $\alpha f + \beta g$, $f \cdot g$ も D で連続" が成り立つことがわかる．実際, $a \in \mathbb{D}$ を任意に取り, 固定して考えれば, f, g は a で連続であるから, 定理 5.1.15 より $\alpha f + \beta g$, $f \cdot g$ も点 a で連続である．ここで $a \in D$ は任意ゆえ, $\alpha f + \beta g$, $f \cdot g$ は D の全ての点で連続であることになり, 結局 D で連続であることがわかる．同様な議論により $f(x) \neq 0$ が全ての $x \in D$ で成り立ち, f, g が D で連続ならば, $1/f$, g/f も D で連続であることがわかる．

例 5.1.16 多項式函数 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ は $\mathbb{R}$ で連続である．

証明．　例 5.1.9 で函数 1, x, $\ldots$, x^n が任意の点 a で連続であることを示した．従って定理 5.1.15 より $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1}$ は a で連続である．さらに $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-1} x^{n-2}$ も連続であり, 以下次々に続けて, $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ が任意の点 a で連続であることがわかる．
□

例 5.1.17 有理函数 $f(x) = p(x)/q(x)$ ($p(x)$, $q(x)$ は多項式) は集合 $A = \{x \in \mathbb{R} : q(x) \neq 0\}$ で連続である．

証明．　例 5.1.16 により $p(x)$, $q(x)$ は $\mathbb{R}$ で連続である．特に定理 5.1.15 の (3) より $1/q(x)$ は A の任意の点で連続である．従って定理 5.1.15 の (1) より $p(x)/q(x)$ も A の任意の点で連続となり, A で連続である．　□

定理 5.1.18 函数 $f : A \to B$ と $g : B \to C$ が与えられているとする．このとき f が a で連続で g が $b = f(a)$ で連続ならば, 合成函数 $g \circ f : A \to C$ は a で連続である．

証明. g は $b = f(a)$ で連続であるから任意の $\varepsilon > 0$ について $\delta > 0$ を $y \in B$ かつ $|y - b| < \delta$ ならば $|g(y) - g(b)| < \varepsilon$ が成り立つようにとる. また f は a で連続であるから, $\delta > 0$ に対して $\delta' > 0$ を $x \in A$ かつ $|x - a| < \delta'$ ならば $|f(x) - f(a)| < \delta$ が成り立つようにとる. このとき $x \in A$ かつ $|x - a| < \delta'$ ならば $|f(x) - b| = |f(x) - f(a)| < \delta'$ となり, さらに $f(x) \in f(A) \subset B$ より $|g(f(x)) - g(f(a))| = |g(f(x)) - g(b)| < \varepsilon$ が成り立つ. よって $g \circ f(x) = g(f(x))$ は a で連続である. □

上の定理より函数 $f : A \to B$ と $g : B \to C$ が与えられていて f が A で g が B で連続ならば $g \circ f : A \to C$ も A で連続であることが容易にわかる.

5.2 有界閉区間上の連続函数

函数 $f : D \to \mathbb{R}$ が有界であるとは, f が D で取りうる値の集合 $f(D) = \{f(x) : x \in D\}$ が有界と定義した. つまり, 任意の $x \in D$ について $A \leq f(x) \leq B$ をみたす, 下界 A と上界 B が (少なくとも 1 つづつ) 存在することである. このとき一般に $a \leq c \leq b$ ならば $|c| \leq \max\{|a|, |b|\}$ が成り立つので, $M = \max\{|A|, |B|\}(\geq 0)$ とおけば任意の $x \in D$ について $|f(x)| \leq M$ が成り立つ.

逆に函数 $f : D \to \mathbb{R}$ が与えられた時, 任意の $x \in D$ について $|f(x)| \leq M$ が成り立てば (このとき必然的に $M \geq 0$ である) $A = -M$, $B = M$ とおくとき $A \leq f(x) \leq B$ が任意の $x \in D$ について成り立つ. つまり

> $f : D \to \mathbb{R}$ が有界であるための必要十分条件は任意の $x \in D$ について $|f(x)| \leq M$ をみたす $M \geq 0$ が存在すること.

が成り立つ.

これから暫くの間 $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ とし, 有界閉区間 $I = [a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ 上の函数を考える..

定理 5.2.1 *f が有界閉区間 $I = [a, b]$ で連続ならば, f は I で有界である.*

証明. f が I で有界でなければ, 任意の $K \geq 0$ について $|f(x)| > K$ をみたす, $x \in I$ が存在する.

従って各 $n \in \mathbb{N}$ について $|f(x_n)| > n$ をみたす $x_n \in I$ を取る. このとき数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $a \leq x_n \leq b$ をみたすので, 有界数列である. 従って Bolzano-Weierstrass の定理 (**??**) より収束する部分列 $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ が取れる. $c = \lim_{k\to\infty} x_{n_k}$ とおくと $a \leq c \leq b$ ゆえ $c \in I$ であり, f は c で連続であるから

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(c)$$

一方, $|f(x_{n_k})| > n_k \geq k$ ゆえ

$$\lim_{k\to\infty} |f(x_{n_k})| = \infty$$

これは矛盾である．よって f が I で有界である．　□

定義 5.2.2 (函数の最大値, 最小値) 函数 $f : D \to \mathbb{R}$ において $x_1 \in D$ が全ての $x \in D$ について $f(x) \leq f(x_1)$ をみたす時, f は x_1 で最大値 (maximum value) $f(x_1)$ を取るという．また $x_2 \in D$ が全ての $x \in D$ について $f(x) \geq f(x_1)$ をみたす時, f は x_2 で最小値 (minimum value) $f(x_2)$ を取るという．

連続函数には必ずしも最大値, 最小値が存在するとは限らないが, 有界閉区間上の連続函数には存在する．

定理 5.2.3 (最大値 · 最小値定理) 函数 f が有界閉区間 $I = [a, b]$ で連続ならば, f は I で最大値, 最小値を取る．

証明．　$V = \{f(x) : x \in I\}$ とおくと, 定理 5.2.1 より, V は有界である．$A = \inf V$ とおくと, A は有限な実数である．下限の性質から, 任意の $\varepsilon > 0$ について $y \in V$ を $A + \varepsilon > y$ となるように取れる．そこで $x \in I$ を $y = f(x)$ をみたすように取れば, 結局 任意の $\varepsilon > 0$ について $A + \varepsilon > f(x)$ をみたす $x \in I$ が存在する．

各 n について $x_n \in I$ を $A + 1/n > f(x_n)$ をみたすように取る．このとき $a \leq x_n \leq b$ より数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ は有界数列であるから, Bolzano-Weierstrass の定理 (**??**) より収束する部分列 $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ が取れる．このとき $\alpha = \lim_{k\to\infty} x_{n_k}$ とおけば, $a \leq \alpha \leq b$ より $\alpha \in I$ である．また f は α で連続であるから,

$$f(\alpha) = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) \leq \lim_{k\to\infty} (A + 1/n_k) = A$$

が成り立つ．一方 A は f が I で取る値の集合の下限であるから $f(\alpha) \geq \alpha$ である．従って $f(\alpha) = A$ であり $f(\alpha) \leq f(x)$ が任意の $x \in I$ について成り立つ．

最大値についても同様であるから, 読者の演習問題としよう．　□

定理 5.2.4 (中間値の定理) 函数 f が有界閉区間 $I = [a, b]$ で連続で $f(a) < f(b)$ であるとする．このとき $f(a) < t < f(b)$ をみたす任意の実数 t について $f(c) = t$ をみたす $c \in (a, b)$ が存在する．また $f(a) > f(b)$ ならば $f(b) < t < f(a)$ をみたす任意の実数 t について $f(c) = t$ をみたす $c \in (a, b)$ が存在する．

証明. $S = \{x \in I : f(x) < t\}$ とおくと, S は I の部分集合であり, 上界 b, 下界 a を持つ. また $f(a) < t$ より $a \in S$ であるから S は空ではない. $\sup S = c$ とおくと, $a \leq c \leq b$ である.

$f(a) < t$ と f が a で右連続であるから, ある $\delta_1 > 0$ を $a \leq x < a+\delta_1$ ならば $|f(x)-f(a)| < t-f(a)$ が成り立つように取れる. このとき $a \leq x < a+\delta_1$ ならば $f(x) = f(x) - f(a) + f(a) < t - f(a) + f(a) = t$ であるから, $a \leq x < a+\delta_1$ ならば $x \in S$ である. よって $c = \sup S \geq a+\delta_1 > a$ である. また $f(b) > t$ と f が b で左連続であるから, ある $\delta_2 > 0$ を $b-\delta_2 < x \leq b$ ならば $|f(x)-f(b)| < f(b)-t$ が成り立つように取れる. このとき $b-\delta_2 < x \leq b$ ならば $f(x) = f(x) - f(b) + f(b) > -(f(b) - t) + f(b) = t$ であるから, $b-\delta_2 < x \leq b$ ならば $x \in S$ である. よって $c = \sup S \leq b-\delta_2 < b$ である. 以上より $a < c < b$ すなわち $c \in (a,b)$ である.

$f(c) = t$ となることを示そう. まず $f(c) < t$ ならば, f が c で連続であるから, $\delta_3 > 0$ を $|x-c| < \delta_3$ ならば $|f(x)-f(c)| < t-f(c)$ が成り立つように取れる. このとき $|x-c| < \delta_3$ ならば $f(x) = f(x)-f(c)+f(c) < t-f(c)+f(c) = t$ となるので, $(c-\delta_3, c+\delta_3) \subset S$ が成り立つ. これは $c = \sup S \geq c+\delta_3 > c$ より矛盾を生じる.

今度は $f(c) > t$ と仮定して矛盾を導こう. $c = \sup S$ であるから, 各 n について $x_n \in S$ を $c - 1/n < x_n \leq c$ をみたすように取ることができる. $x_n \in S$ より $f(x_n) < t$ である. 従って f は c で連続であることより $f(c) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) \leq t$ となり, 矛盾である.

以上より $f(c) < t$ でも $f(c) > t$ でも矛盾を生じるので $f(c) = t$ である.

後半については, $-f$ と $-t$ に前半 (既に証明済み) を用いれば良い. □

系 5.2.5 函数 f が有界閉区間 $I = [a,b]$ で連続で $f(a)f(b) < 0$ ならば, 方程式

$$f(x) = 0$$

は少なくとも 1 つの解 $x = c$ を持つ.

証明. $f(a)f(b) < 0$ とは $f(a) > 0 > f(b)$ または $f(a) < 0 < f(b)$ のどちらかが成り立つことを意味する. よって $t = 0$ として中間値の定理 (5.2.4) を用いれば $f(c) = 0$ をみたす点 c の存在が従う. □

定理 5.2.6 函数 f が有界閉区間 $I = [a,b]$ で連続ならば, その像 $f(I) = \{f(x) : x \in I\}$ も有界閉区間である.

証明.　最大値 · 最小値 (5.2.3) より, 任意の $x \in I$ について $f(\alpha) \leq f(x) \leq f(\beta)$ をみたす $\alpha, \beta \in I$ が存在する. このとき $f(\alpha) = m$, $f(\beta) = M$ とおくと, $f(I) \subset [m, M]$ が成り立つ.

$f(\alpha) = m$, $f(\beta) = M$ より $m, M \in f(I)$ が成り立つ. $m = M$ のときは, $f(I) = [m, M] = \{M\}$ となり, $f(I)$ は有界閉区間である. 従って $m < M$ のとき, $(m, M) \subset f(I)$ を示せば証明は完了する.

$\alpha < \beta$ のときは, 有界閉区間 $[\alpha, \beta]$ において f が連続であるから, これに中間値の定理 (5.2.4) を用いて, 任意の $t \in (m, M)$ について $f(c) = t$ となる, $c \in (\alpha, \beta) \subset (a, b)$ が存在するので, $t \in f(I)$ である. よって $(m, M) \subset f(I)$ が成り立つ.

$\alpha > \beta$ のときは, 有界閉区間 $[\beta, \alpha]$ と f に対して中間値の定理を用いれば良い.　□

5.3　一様連続函数

定義 5.3.1 連続度点 a は函数 f の定義域に属すとする. このとき $t > 0$ について

$$\omega_f(t) \stackrel{\text{def}}{=} \sup\{|f(x) - f(a)| : x \in D \text{ かつ } |x - a| < t\}$$

おく. 但し $\{|f(x) - f(a)| : |x - a| < t\}$ が上に有界でないときは ∞ とおく. このとき $\omega_f(t)$ は (∞ も値として取ることを許せば) t の函数であり, これを f の a における連続度 (modulus of continuity) と呼ぶ. 上の定義式において, t が大きい程, sup を考える集合は大きくなるので, $\omega_f(t)$ は t の増加函数である.

f が a において連続であることと, $\omega_f(t) \to 0$ $(t \to +0)$ が成り立つことが同値であることは容易にわかるであろう. また a を動かして, 各 a について連続度を考える時は, $\omega_f(t, a)$ のように表わすことにする.

例 5.3.2 $\mathbb{R}$ 上の函数 f を

$$f(x) = x^2$$

とおく. このとき $f(x)$ は $\mathbb{R}$ で連続であるがここではもっと詳しく各点 $a \in [1, \infty)$ において $0 < t < 1$ の範囲での連続度を調べると.

$$\omega_f(t, a) = t(2a + t)$$

となる.

証明. $a \in [1, \infty)$ とする. $0 < t < 1$ のとき $|x - a| \le t$ ならば $0 < a - t \le x \le a + t$

$|f(x) - f(a)| = |x - a||x + a| = |x - a|(x + a) \le t(2a + t)$ 等号は $x = a + t$ のとき

である. よって $\omega_f(t, a) = t(2a + t)$ である. □

上の例についてもっと考えてみよう. t を固定して $\omega_f(t, a)$ を a の函数とみると, a について単調増加であり $a \to \infty$ のとき $\omega_f(t, a) \to \infty$ である. これを直観的に表現すれば, a が大きい程 f の連続性がどんどん弱まり, $a \to \infty$ のとき連続度が発散することを示していると考えられる.

幸運なことに有界閉区間上の連続函数についてはこのような現象がおこらない. これを説明する為にまず次のように定義をしよう.

定義 5.3.3 D を定義域とする函数 $f : D \to \mathbb{R}$ が与えれているとする. このとき任意の $\varepsilon > 0$ について $\delta > 0$ を

$$x, y \in D \text{ で } |x - y| < \delta \text{ ならば } |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

が成り立つように取れる時, f は D で一様連続であるという.

この定義は 1 点 a における連続の定義と似ているが, $\delta > 0$ は ε にのみ依存し a に依存しないことに注意しよう. また f が D で一様連続ならば, f は D で連続であることは明らかであろう.

定理 5.3.4 f が D で一様連続である為の必要十分条件は

$$\sup\{\omega_f(a, t) : a \in D\} \to 0 \quad (t \to +0)$$

である.

証明. f が D で一様連続であるとする. 任意の $\varepsilon > 0$ について $\delta > 0$ を $x, y \in D$ で $|x - y| < \delta$ ならば $|f(x) - f(y)| < \varepsilon/2$ が成り立つように取る. このとき任意の $a \in D$ と $0 < t < \delta$ をみたす t について $x \in D$ で $|x - a| < t$ ならば, $|x - a| < \delta$ が成り立つから $|f(x) - f(a)| < \varepsilon/2$ が成り立つ. よって

$$\omega_f(t, a) = \sup\{|f(x) - f(a)| : x \in D \text{ かつ } |x - t| < t\} \le \varepsilon/2$$

を得る. さらに $a \in D$ は任意であるから, $\sup\{\omega_f(a, t) : a \in D\} \le \varepsilon/2$ である. つまり, $\varepsilon > 0$ について $\delta > 0$ を $0 < t < \delta$ ならば $\sup\{\omega_f(a, t) : a \in D\} \le \varepsilon/2 < \varepsilon$ が成り立つように取ることができたから, $\sup\{\omega_f(a, t) : a \in D\} \to 0$ $(t \to +0)$ が成り立つ.

逆に $\sup\{\omega_f(a,t) : a \in D\} \to 0$ $(t \to +0)$ が成り立つとすると, 任意の $\varepsilon > 0$ について $\delta_0 > 0$ を $0 < t < \delta_0$ ならば $\sup\{\omega_f(a,t) : a \in D\} < \varepsilon/2$ が成り立つように取ることができる. ここで $0 < \delta < \delta_0$ をみたす δ を取る. このとき 任意の $a \in D$ について $\omega_f(\delta, a) \leq \varepsilon/2$ が成り立つ. よって x, $y \in D$ が $|x-y| < \delta$ ならば $a = y$ として

$$|f(x) - f(y)| \leq \omega_f(y,\delta) \leq \varepsilon/2 < \varepsilon$$

が成り立つ. □

定理 5.3.5 $I = [a,b]$ を有界閉区間とする. このとき函数 f が I で連続ならば I で一様連続である.

証明. f が I で一様連続でないと仮定すると, ある $\varepsilon > 0$ で次の性質をもつものが存在する. 任意の $\delta >$ について

$|x-y| < \delta$ をみたす x, $y \in I$ で $|f(x) - f(y)| \geq \varepsilon$ となるものが存在する.

各 $n \in \mathbb{N}$ について $\delta = 1/n$ とおいて x_n, $y_n \in I$ を $|x_n - y_n| < 1/n$ かつ $|f(x) - f(y)| \geq \varepsilon$ となるものを取る.

Bolzano-Weierstrass の定理より, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ の部分列 $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ で収束するものが取れる. $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = c$ とおくと $a \leq x_{n_k} \leq b$ より $a \leq c \leq b$ であり, $c \in I$ である. $|x_{n_k} - y_{n_k}| < 1/n_k \leq 1/k$ より, $y_{n_k} \to c$ $(k \to \infty)$ である.

f は c で連続であるから, 上の $\varepsilon > 0$ について $\gamma > 0$ を $|x - c| < \gamma$ ならば $|f(x) - f(c)| < \varepsilon/2$ となるように取ることができる.

$k \to \infty$ のとき $x_{n_k} \to c$, $y_{n_k} \to c$ より $|x_{n_k} - c| < \gamma$ かつ $|y_{n_k} - c| < \gamma$ となる $k \in \mathbb{N}$ を取ることができる. このとき

$$\varepsilon \leq |f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \leq |f(x_{n_k}) - f(c)| + |f(y_{n_k}) - f(c)| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

となり矛盾を生じる. 従って f は一様連続でなければならない. □

連続函数が必ずしも一様連続とは限らないことは, 例 5.3.2 を考えれば了解できるであろう.

5.4 単調函数と連続性

定理 5.4.1 函数 f が有界閉区間 $I = [a,b]$ で 1 対 1 かつ連続であるとする. このとき f は I で狭義単調 (つまり, 狭義増加または狭義減少) である.

証明. (i) 任意の α, γ, $\beta \in I$ で $\alpha < \gamma < \beta$ をみたすものについて $f(\gamma)$ が $f(\alpha)$ と $f(\beta)$ の間にあり, どちらとも一致しないことを示す.

まず $f(\alpha) < f(\beta)$ と仮定しよう. このとき $f(\gamma) = f(\alpha)$ ならば f が 1 対 1 であることに矛盾する. また $f(\gamma) < f(\alpha)$ ならば, $f(\gamma) < t < f(\alpha)$ をみたす t を取り, 区間 $[\alpha, \gamma]$ と $[\gamma, \beta]$ に中間値の定理を適用して $f(c_1) = f(c_2) = t$ となる $c_1 \in \alpha, \gamma$ と $c_2 \in (\gamma, \beta)$ が存在する. これは f が 1 対 1 であることに矛盾する. 従って $f(\gamma) > f(\alpha)$ が成り立つ. 同様に $f(\gamma) = f(\beta)$, $f(\gamma) > f(\beta)$ と仮定しても矛盾を生じるので, $f(\gamma) < f(\beta)$ であることが従う. よって $f(\alpha) < f(\gamma) < f(\beta)$ が成り立つ.

$f(\alpha) > f(\beta)$ の場合に $f(\alpha) > f(\gamma) > f(\beta)$ が成り立つことも, 同様である.

(2) $f(a) < f(b)$ のときに f が狭義増加であることを示そう. これには $x_1 < x_2$ をみたす任意の x_1, $x_2 \in I$ について $f(x_1) < f(x_2)$ を示せば良い. まず $a \leq x_1 \leq b$ であるから (1) より $f(a) \leq f(x_1) \leq f(b)$ が成り立つ. 次に $x_1 < x_2 \leq b$ より再び (2) により $f(x_1) < f(x_2) \leq f(b)$ が成り立つ.

$f(a) > f(b)$ のときに f が狭義減少となることの証明も同様である. f は 1 対 1 であるから $f(a) = f(b)$ となることはないので, これで証明が完了した.
□

定理 5.4.2 函数 f が有界閉区間 $I = [a, b]$ で単調 *(*つまり*,* 増加または減少*)* で $f(a)$ と $f(b)$ の値を全て取れば, 連続である.

証明. 減少の場合も同様であるから, f は I で増加として証明する.

$a < x_0 << \leq b$ をみたす任意の x_0 について f が x_0 で左連続であることを示す.

定理 4.4.2 より左極限 $f(x_0 - 0) = \lim_{x \to x_0 - 0} f(x)$ が存在する. f は増加であるから $f(x_0 - 0) \leq f(x_0)$ である. $f(x_0 - 0) < f(x_0)$ と仮定して矛盾を導こう. f は増加であるから, $x < x_0$ について $f(x) \leq f(x_0 - 0)$ また $x \geq x_0$ について $f(x) \geq f(x_0)$ である. よって $f(x_0 - 0) << t < f(x_0)$ をみたす t を f は取らない. これは仮定に反する.

$a \leq x_0 < b$ をみたす任意の x_0 について f が x_0 で右連続であることも同様に示される.

以上より f は $a < x_0 < b$ をみたす x_0 において左連続かつ, 右連続であるので連続である (定理 5.1.5).　□

系 5.4.3 函数 f は有界閉区間 $I = [a, b]$ において狭義単調かつ連続であるとする. このとき $J = f(I)$ とおくと f の逆函数 $f^{-1} : J \to I$ も狭義単調で連続である.

証明. f は有界閉区間で連続であるから, 定理 5.2.6 より, J も有界閉区間である. f は I で狭義単調であるから, 1 対 1 であり, $J = \{f(x) : x \in I\}$ であるから $f : I \to J$ は上への函数である. 従って $f^{-1} : J \to I$ が存在し, f^{-1} も 1 対 1 かつ上への函数である. さらに f^{-1} は狭義単調である. よって定理 5.4.2 より f^{-1} は連続である. □

系 5.4.4 $I = (a, b)$, で $a = -\infty$ または $b = \infty$ であっても良いとする. このとき I において狭義単調連続函数 f の逆函数 f^{-1} も連続である.

証明.

$$\alpha_1 > \alpha_2 > \cdots \to a$$
$$\beta_1 < \beta_2 < \cdots \to b$$

となる $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ と $\{\beta_n\}_{n=1}^{\infty}$ を取り, 各 n について f を $[\alpha_n, \beta_n]$ に制限して系 5.4.3 を適用すれば, f^{-1} が $J_n = f([\alpha_n, \beta_n])$ で連続であることがわかる.

任意の $y_0 \in J = f(I)$ について $y_0 = f(x_0)$ となる $x_0 \in I$ を取る. このとき $x_0 \in (\alpha_n, \beta_n)$ が成り立つ $n \in \mathbb{N}$ が存在する. これより $y_0 \in J_n = f([\alpha_n, \beta_n])$ となり, f^{-1} は J_n で連続であったから, $y_0 = f(x_0) \in J_n$ で連続である. 以上より任意の $y_0 \in J$ について f^{-1} は y_0 で連続であるから, f^{-1} は J で連続である. □

5.5　指数函数, 対数函数, 逆三角函数

この節で今までに証明した定理の応用として, 指数函数や対数函数, 逆三角函数について連続性やその他の性質を調べよう.

指数函数　まず指数函数の厳密な定義からはじめよう. $a > 0$ とする.

$$a^0 = 1,\ a^1 = a,\ a^2 = a \cdot a,\ a^3 = a \cdot a^2, \ldots$$

として $n = 1, 2, \ldots$ について a^n を定義する. また n が負の整数のときは $a^n = 1/a^{-n}$ と定義する. 以上で整数 n について a^n が定義された. このとき

(5.5.1) $$a^m a^n = a^{m+n}$$

(5.5.2) $$(a^m)^n = a^{mn}$$

(5.5.3) $$(ab)^n = a^n b^n$$

が成り立つ. 次に有理数 $r = q/p$, $p \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{Z}$ については a^r を方程式 $x^p = a^q$ の解として定義する. これをもう少し詳しく説明しよう.

$f(x) = x^p$ とおくと f は $[0, \infty)$ で狭義増加で $f(0) = 0$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ である. 従ってある $x_0 \in (0, \infty)$ で $f(x_0) > a^q$ をみたすものが存在する. よって中間値の定理 (5.2.4) を $[0, x_0]$ に適用して $c^p = f(c) = a^q$ をみたす $c \in (0, x_0)$ の存在がわかる. ここで f は $[0, \infty)$ で狭義単調ゆえ, このような c はただ 1 つである. 次に $r = q/p$, $p \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{Z}$ について別の表示 $r = q'/p'$, $p' \in \mathbb{N}$, $q' \in \mathbb{Z}$ を用いて $x^{p'} = a^{q'}$ の解 c' が得られたとして, $c = c'$ を示そう. これは

$$c^p = a^q, \quad c^{p'} = a^{q'}$$

において, 第 1 の等式と第 2 の等式の両辺をそれぞれ q', q 乗して, $c^{pq'} = a^{qq'}$ と $c^{p'q} = a^{qq'}$ を得るから, $c^{pq'} = c^{p'q}$ を得る. $r = q/p = q'/p'$ より $p'q = pq'$ であるから, $n = p'q = pq'$ とおくと, $c^n = a^{qq'}$ と $c'^n = a^{qq'}$ となる. 従って c と c' は方程式 $x^n = a^{qq'}$ の $(0, \infty)$ におけるただ 1 つの解であるから, $c = c'$ である.

以上より, a^r を $x^p = a^q$ の $(0, \infty)$ における, ただ 1 つの解 c とおくことにより a^r が一意的に定義できる.

さてこのように任意の有理数 r と実数 $a > 0$ について a^r が定義されたとき, 次の指数法則が成り立つ.

$$(1)\ \ a^r a^s = a^{r+s}, \quad (2)\ \ (a^r)^s = a^{rs}, \quad (3)\ \ (ab)^r = a^r b^r,$$

但し a, $b > 0$ とし, $r, s \in \mathbb{Q}$ とする. (2) と (3) についても同様であるから, ここでは (1) だけを証明しておこう.

$r = q_1/p$, $s = q_2/p$ をみたす, $p \in \mathbb{N}$ と q_1, $q_2 \in \mathbb{Z}$ を取る. このとき $a^{r+s} = a^{(q_1+q_2)/p}$ より a^{r+s} は $x^p = a^{q_1+q_2}$ をみたす $(0, \infty)$ におけるただ 1 つの解である. 一方 a^r は方程式 $x^p = a^{q_1}$ をみたすので $(a^r)^p = a^{q_1}$. 同様に $(a^s)^p = a^{q_2}$ である. ここで $a^r > 0$ と $a^s > 0$ に (5.5.3) を用い, さらに (5.5.1) を用いて

$$\{(a^r)(a^s)\}^p = (a^r)^p (a^s)^p = a^{q_1} a^{q_2} = a^{q_1+q_2}$$

を得るので, $(a^r)(a^s)$ も $x^p = a^{q_1+q_2}$ をみたす $(0, \infty)$ における解である. このような解はただ 1 つであるから, $(a^r)(a^s) = a^{r+s}$ である.

$a > 1$ で $r \in \mathbb{Q}$ が正としよう. このとき $r = q/p$, $p \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{N}$ と表現できる. a^r は $f(x) = x^p = a^q$ をみたす $(0, \infty)$ におけるただ 1 つの解である

が, $a > 1$ と $q \in \mathbb{N}$ より $a^q > 1$ である. $f(0) = 0$ と $f(1) = 1$ であり, f は $[0, \infty)$ で狭義単調増加であるから, このような解は $[0, 1]$ には属さない. よって解 a^r は $a^r > 1$ をみたす. つまり

$$(4)\ a > 1, r \in \mathbb{Q} \text{ が } r > 0 \text{ ならば } a^r > 1$$

が成り立つ. 従って $a > 1$ のとき $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$ が $r_1 < r_2$ をみたせば $a^{r_2 - r_1} > 1$ であるから $a^{r_2} = a^{r_2 - r_1} a^{r_1} > a^{r_1}$ が成り立つ. つまり a^r を定義域が $\mathbb{Q}$ の函数と考えて狭義増加函数である.

以上のようにして a^x を $\mathbb{Q}$ を定義域とする, 狭義増加函数で, (1), (2), (3), (4) をみたすように定義できた. 次にこの函数の定義域を $\mathbb{R}$ に拡張しよう.

まず $a > 1$ のときに拡張を行なう. 任意の無理数 ξ について $r_n < \xi$ で $r_n \to \xi$ となる有理数の列 $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ を取ると a^{r_n} は単調増加である. さて r_0 を $\xi < r_0$ をみたす有理数とすると $a^{r_n} < a^{r_0}$ であるから $\{a^{r_n}\}_{n=1}^{\infty}$ は上に有界な増加数列であり, 従って収束する. この極限 $\lim_{n\to\infty} a^{r_n}$ を a^{ξ} と定義したいのだが, これにはこの極限が有理数の列 $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ によらず定まることを示さなければならない.

別の有理数の列 $\{r'_n\}_{n=1}^{\infty}$ $r'_n < \xi$ と $r'_n \to \xi$ をみたすものについて $\lim_{n\to\infty} a^{r_n} = \lim_{n\to\infty} a^{r'_n}$ となることを示そう. 任意の n を取り固定する. このとき $\varepsilon = \xi - r_n > 0$ とおくと, ある $m \in \mathbb{N}$ で $|r'_m - \xi| < \varepsilon$ となるものが存在する. このとき $r_n = \xi - \varepsilon < r'_m < \xi$ より

$$a^{r_n} < a^{r'_m} \leq \lim_{k\to\infty} a^{r'_k}$$

である. この不等式において $n \to \infty$ として

$$\lim_{n\to\infty} a^{r_n} \leq \lim_{k\to\infty} a^{r'_k}$$

が成り立つ. $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ と $\{r'_n\}_{n=1}^{\infty}$ の役割をいれかえれば

$$\lim_{n\to\infty} a^{r'_n} \geq \lim_{n\to\infty} a^{r_n}$$

を得るので, 2 つの極限は一致する.

以上より x が有理数のときは a^x を前の定義のままとし, x が無理数のときは $r_n < x$ で $r_n \to x$ となる有理数の列 $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ を取り, $a^x = \lim_{n\to\infty} a^{r_n}$ と定義する. これで $a > 1$ のとき指数函数 a^x が全ての $x \in \mathbb{R}$ について定義された.

$a = 1$ のときは $a^x \equiv 1$ と定義する. また $a < 1$ の場合は $a^x = 1/(a^{-x})$ と定義する.

指数函数 a^x について (1), (2) (3) が任意の r, s について成り立つ. 他の場合もほぼ同様であるから, ここでは (1) を r と s が無理数の場合に示しておこう.

$r_n < r$, $r_n \to r$, $s_n < s$, $s_n \to s$ をみたす有理数の列を取れば, $a^{r_n}a^{s_n} = a^{r_n+s_n}$ が成り立つ. $\{r_n+s_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $r_n+s_n < r+s$ をみたし $r_n+s_n \to r+s$ となる有理数の列であるから, $a^{r+s} = \lim_{n\to\infty} a^{r_n+s_n}$ である. よって

$$a^{r+s} = \lim_{n\to\infty} a^{r_n+s_n} = \lim_{n\to\infty} a^{r_n} \lim_{n\to\infty} a^{s_n} = a^r a^s$$

が成り立つ.

指数函数 a^x は $a > 1$ のとき狭義増加である. これは函数 a^x を $\mathbb{Q}$ に制限したとき狭義増加函数であることを用いて示すことができる. 実際 $x_1 < x_2$ について有理数 c_1, c_2 を $x_1 < c_1 < c_2 < x_2$ となるように取れるので $a^{x_1} \leq a^{c_1} < a^{c_2} \leq a^{x_2}$ となることより従う. また $0 < a < 1$ のとき a^x が狭義減少であることは $a^x = 1/(a^{-x})$ と定義したことから従う.

次に $a > 1$, $a = 1$, $0 < a < 1$ のとき a^n はそれぞれ $\to \infty$, $\to 1$, $\to 0$ であることと, a^x がそれぞれの場合, 増加函数, 定数函数, 減少函数であることより.

$$\lim_{x\to\infty} a^x = \begin{cases} \infty & a > 1 \\ 1 & a = 1 \\ 0 & 0 < a < 1 \end{cases}$$

が成り立つ.

最後に指数函数 a^x が $\mathbb{R}$ で連続であることを示そう. $a = 1$ の場合は $a^x \equiv 1$ であるから明らかである. また $0 < a < 1$ のときは $a^x = 1/(a^{-x})$ と定義したから, $a > 1$ の場合に連続であることを示せば十分である.

まず

$$\lim_{x\to 0+} a^x = 1$$

を証明する. これは $a < n$ のとき $1 < a^{1/n} < n^{1/n}$ が成り立ち例 3.1.8 より $\lim_{n\to\infty} n^{1/n} = 1$ が成り立つことから $\lim_{n\to\infty} a^{1/n} = 1$ となる. a^x は x について単調減少ゆえ $\lim_{x\to+0} a^x = \lim_{n\to\infty} a^{1/n}$ が成り立つので, $\lim_{x\to+0} a^x = 1$ である.

さらに $a^{-x} = 1/a^x$ より $\lim_{x\to-0} a^x = \lim_{x\to 0+} 1/a^x = 1$. が成り立つので,

$$\lim_{x\to 0} a^x = 1$$

が成り立つ.

さて, 任意の $x_0 \in \mathbb{R}$ について $a^x = a^{x-x_0}a^{x_0}$ より

$$\lim_{x\to x_0} a^x = a^{x_0}\lim_{x\to x_0} a^{x-x_0} = a^{x_0}\lim_{h\to 0} a^h = a^{x_0}$$

となる. よって a^x は任意の $x_0 \in \mathbb{R}$ で連続, つまり $\mathbb{R}$ で連続である.

対数函数 $a > 0$, $a \neq 1$ のとき 指数函数 $y = f(x) = a^x$ は狭義単調であり, $f(\mathbb{R}) = (0, \infty)$ である. したがって f の定義域を $\mathbb{R}$、値域を $(0, \infty)$ と考えて 1 対 1 かつ 上への函数である. よって逆函数 $f^{-1} : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ が存在して, 系 5.4.4 より連続である. この逆函数を $x = \log_a y$ と書いて, a を底とする対数函数という. ここでは独立変数と従属変数を入れ替えて $y = \log_a x$ と書くことにする. とくに $e = \lim_{\to\infty n}(1 + 1/n)^n$ について e^x の逆函数 $\log_e x$ を自然対数といい, 底を省略して $\log x$ と書いたり, $\ln x$ と書くことがある.

一般に逆函数について

$$f^{-1}(f(x)) = x,\ \ f(f^{-1}(y)) = y$$

が成り立つことに注意すれば, 指数函数の性質から, 対数函数の性質を導くことができる. 例えば $a^{x_1}a^{x_2} = a^{x_1+x_2}$ は $f(x_1)f(x_2) = f(x_1 + x_2)$ とかくことができるが, ここで $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$ とおいて $y_1y_2 = f(f^{-1}(y_1) + f^{-1}(y_2))$. よって $f^{-1}(y_1y_2) = f^{-1}(y_1) + f^{-1}(y_2)$ となる. つまり $\log_a(y_1y_2) = \log_a y_1 + \log_a y_2$ である. 最後に y_1, y_2 をおきかえて

$$\log_a(x_1x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2$$

を得る.

問題 5.5.1

$$\begin{aligned}
\log_a x^b &= b\log_a x \\
\log_a x_1/x_2 = &= \log_a x_1 - \log_a x_2 \\
a &= e^{\log a} \\
a^x &= e^{x\log a} \\
\log_b a &= \frac{\log_c a}{\log_c b}
\end{aligned}$$

を証明せよ.

例 5.5.2 $\lim_{x\to\pm\infty}(1 + 1/x)^x = e$.

証明. $x > 1$ について $n \leq x < n + 1$ となる自然数 $n \in \mathbb{N}$ をとる. つまり $n = [x]$(Gauss 記号) である. このとき

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

が成り立つ. $\lim_{n\to\infty}(1+1/n)^n = e$ より

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n &= e \\ \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} &= e \end{aligned}$$

が成り立つ. よって任意の $\varepsilon > 0$ についてある自然数 N で $n \geq N$ をみたす全ての n について

$$\left|\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n - e\right| < \varepsilon,$$
$$\left|\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} - e\right| < \varepsilon$$

となるものが存在する. よって $x \geq N$ ならば $n = [x]$ とおくとき $n \geq N$ であり.

$$e - \varepsilon < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n < \left(1+\frac{1}{x}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} < e + \varepsilon$$

となる. よって $\lim_{x\to\infty}(1+1/x)^x = e$ がなりたつ. また, これより

$$\begin{aligned} \lim_{x\to-\infty}(1+1/x)^x &= \lim_{h\to\infty}(1-1/h)^{-h} \\ &= \lim_{h\to\infty}(h/(h-1))^h \\ &= \lim_{h\to\infty}(1+1/(h-1))(1+1/(h-1))^{h-1} \\ &= \lim_{h\to\infty}(1+1/(h-1))^{h-1} \\ &= \lim_{x\to\infty}(1+1/x)^x \\ &= e \end{aligned}$$

例 5.5.3 $\lim_{h\to 0}\dfrac{\log(1+h)}{h} = 1$

証明. $\lim_{h\to 0+}(1+h)^{1/h} = \lim_{x\to\infty}(1+1/x)^x = e = \lim_{x\to-\infty}(1+1/x)^x$ $= \lim_{h\to 0-}(1+h)^{1/h}$ に注意すれば Theroem **??** より

$$\frac{\log(1+h)}{h} = \log(1+h)^h \to \log e = 1$$

例 5.5.4 $\lim_{h\to 0}\dfrac{e^h-1}{h} = 1$

証明. $e^h - 1 = u$ とおくと $h = \log(1+u)$ $h \to 0$ のとき $u \to 0$ より

$$\frac{e^h-1}{h} = \frac{u}{\log(1+u)} = \frac{1}{\frac{\log(1+u)}{u}} \to 1$$

問題 5.5.5 次の極限値を求めよ.

(1) $\lim_{x\to\pm\infty}(1+a/x)^x$ (2) $\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{1/x}$
(3) $\lim_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{a}-1)$ (4) $\lim_{x\to\infty} x^{1/x}$

逆三角関数函数 $\sin x$ は定義域を $\mathbb{R}$ とすると 1 対 1 の函数ではないから逆函数は存在しない. しかし定義域を制限して $-\pi/2 \le x \le \pi/2$ つまり $[-\pi/2, \pi/2]$ に制限して考えれば, この区間から $[-1, 1]$ への上への 1 対 1 の函数である. この逆函数を逆正弦函数の主値とよび $\sin^{-1} x$ $Arcsinx$ 等で表わす. もちろん $[\pi/2, 3\pi/2]$ や $[3\pi/2, 5\pi/2]$ 等に制限してこれらの区間での $\sin x$ の逆函数を考えてもよい. このようにして得られる様々な逆函数の 1 つ 1 つを逆正弦函数の分枝という. このような分枝を考える時は, 定義域と値域を良く把握しておくことが重要である.

同様に主値 $\cos^{-1} x$ や主値 $\tan^{-1} x$ についてはそれぞれ $[0, \pi]$, $[-\pi/2, \pi/2]$ に制限して考える.

問題 5.5.6 次の等式を証明せよ. 但し逆三角関数は全て主値を取るものとする.

$$\cos(\sin^{-1} x) = \sqrt{1-x^2},\ -1 \le x \le 1$$
$$\sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \pi/2,\ -1 \le x \le 1$$
$$\tan^{-1} x + \tan^{-1} 1/x = \begin{cases} \pi/2 & x > 0 \\ -\pi/2 & x < 0 \end{cases}$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^{-1} x}{x} = 1.$$

関連図書

[1] 笠原章男, 自然数から実数まで, サイエンス社

索 引

at most countable set, 24

bijection, 23
binomial coefficient, 48
binomial expansion, 48

cardinal number, 24
class, 8
complement, 11
composition, 22
contrapositive, 15
converse, 15
countable set, 24

difference set, 9
direct product, 11
disjoint, 5

empty set, 3
existential quantifier, 17

finite set, 5, 24
function, 22

infinite set, 5, 24
injection, 23
intersection, 5
inverse map, 23

map, 22
mapping, 22

necessary condition, 15
negation, 13
noninterseting, 5

ordered pair, 11

power, 24
proper subset, 1
proposition, 12

set, 1
statement, 12
sufficient condition, 15
surjection, 23

uncountable set, 24
union, 5
universal quantifier, 17
universal set, 10

$\aleph$, 24
$\aleph_0$, 24
上に有界, 38
n 乗根, 47
階乗, 47
拡張された実数系, 41
下限 (infimum), 39
下限の存在公理, 41
加算集合, 24
仮定, 15
函数, 22
基数, 24
基本列, 70
狭義減少数列 (strictly decreasing sequence), 66
狭義増加数列 (strictly increasing sequence), 66
共通部分, 5
逆, 15
逆写像, 23

空集合, 3
区間 (interval), 35
区間縮小法の原理, 69
結論, 15
下界 (lower bound), 38
元, 1
減少数列, 66
Cauchy の判定条件, 71
コーシー列 (Cauchy sequence), 70
合成, 22
合成命題, 12
最小上界 (least upper bound), 39
最小値 (minimum value), 36
最大下界 (greatest lower bound), 39
最大値 (maximum value), 35
差集合, 9
三角不等式, 36
三者択一, 34
下に有界, 38
写像, 22
集合, 1
集合族, 8
真部分集合, 1
真理集合, 16
十分条件, 15
順序対, 11
自由変数を含む命題, 16
上界 (upper bound), 37, 38
条件, 16
上限 (supremum), 39
上限の存在公理, 40
数列, 53
成分命題, 12
積 (multiplication), 29
積集合, 5
絶対値 (absolute value), 36
全写, 23
全称記号, 17
全体集合, 10
全単写, 23
存在記号, 17
像 (image), 22
増加数列 (increasing sequence), 66
対偶, 15
高々可算な集合, 24
単写, 23
単調数列 (monotone sequence), 66
値域 (range), 22
直積, 11
定義域 (domain), 22
二項係数, 48
二項展開, 48
Nepia の定数, 68
濃度, 24
非可算集合, 24
必要条件, 15
否定, 13
部分列 (subsequence), 69
平方根, 47
補集合, 11
ボルツァーノ-ワイエルストラスの定理 (Bolzano-Weierstrass' theorem), 70
交わり, 5
無限集合, 5, 24
無限大, 41
命題, 12
有界, 38
有限集合, 5, 24
要素, 1
連続性の公理, 34
論理積, 13
論理和, 13
和 (addition), 29
Weierstrass の定理, 66
和集合, 5